RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Per le Note e Memorie che sorpassano le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la *Redazione* nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari=L. 5; 100=L. 7, 75; 150=L. 11; 200=L. 13, 75; 250=L. 17.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia e Fonderia di Caratteri di M. AMENTA, via Vittorio Emanuele, 330, Palermo.

Proto-Compositore: S. Luminaria.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO IV. — ANNO 1890.

PARTE PRIMA : MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28

1890

CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

(28, VIA RUGGIERO SETTIMO.)

STATUTO DELLA SOCIETÀ

discusso ed approvato dall'Assemblea generale dei soci del dì 26 febbrajo 1888.

Scopo della Società. — Sede.

Art. 1. — La società scientifica *Circolo Matematico di Palermo* ha per iscopo l'incremento e la diffusione delle scienze matematiche in Italia.

Art. 2. — A tal fine, il Circolo :

a) Tiene adunanze nella sua sede.

b) Pubblica una rivista periodica di matematica col titolo : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Potrà inoltre istituire concorsi a premi e farsi promotore di congressi scientifici nelle varie città del Regno.

Art. 3. — La sede della Società è in Palermo, ed è inamovibile.

Dei Soci. — Ammissione. — Contribuzioni.

Art. 4. — Il Circolo si compone di due categorie di soci : *residenti* e *non residenti*. Nella prima si comprendono coloro che hanno in Palermo dimora abituale.

Gli stranieri possono far parte della società.

Art. 5. — Il numero dei soci *residenti* e *non residenti* è illimitato.

Art. 6. — Per l'ammissione al Circolo è necessario : 1° Essere proposto, in un'adunanza, da due soci (residenti o non residenti) mediante domanda, per iscritto, al Presidente; 2° ottenere, nell'adunanza seguente, i suffragi della maggioranza dei soci presenti.

Art. 7. — Ogni socio *residente* è tenuto al pagamento : 1° di una *tassa d'entrata* di L. 10, da pagarsi all'atto dell'ammissione ; 2° di una *contribuzione annua* di L. 15, da pagarsi a quadrimestri anticipati, al 1° gennajo, al 1° maggio ed al 1° settembre di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dal principio dell'anno in corso.

Art. 8. — Ogni socio *non residente* è tenuto al pagamento della sola *contribuzione annua* di L. 15, da versarsi, anticipatamente, al 1° gennajo di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dall'anno in corso.

Art. 9. — Le dimissioni da socio del Circolo non sono valide se il dimissionario non abbia soddisfatto l'intera contribuzione annua. Esse dovranno essere dirette al Presidente che ne darà partecipazione alla Società nell'adunanza più vicina.

Chi si è dimesso può, dietro domanda da lui sottoscritta, rientrare nella Società, mediante la votazione di cui all'Art. 6.

Art. 10. — Il socio moroso, trascorsi 6 mesi dall'epoca stabilita per il pagamento, sarà, dietro avvertimento preventivo del tesoriere, radiato dall'elenco dei soci.

Art. 11. — Il versamento, in unica volta, di L. 300 conferisce il titolo di *socio perpetuo*, ed esonera dal pagamento della contribuzione annua. In caso di scioglimento della Società non si ha alcun diritto a rimborso.

Art 12. — Il socio residente, per il fatto del trasferimento della sua dimora abituale, è ascritto fra i non residenti, senza poter ripetere il rimborso della tassa di entrata. È tenuto al pagamento della medesima il socio non residente che acquista, per la prima volta, la qualità di residente.

Art. 13. — Tutti i soci, residenti e non residenti, riceveranno gratuitamente i *Rendiconti* del Circolo. Ogni nuovo ammesso ha diritto al volume in corso di stampa all'epoca della sua ammissione.

Dell'Ufficio di Presidenza.

Art. 14. — La rappresentanza e la direzione amministrativa della Società spetta all'*Ufficio di Presidenza*, costituito dagli ufficiali della Società:

1 presidente,
1 vice-presidente,
2 segretari,
2 vice-segretari,
1 tesoriere,
2 bibliotecari,

eletti dai soci residenti, nel proprio seno, a scrutinio segreto.

L'Ufficio di Presidenza rimane in carica due anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 15. — Per l'elezione dell'Ufficio di Presidenza si terrà apposita adunanza straordinaria nella 1ª domenica di gennajo. Prendono parte alla votazione soltanto i soci presenti.

Ove durante il biennio rimanga vacante una carica dell'Ufficio di Presidenza, i soci residenti saranno convocati in apposita adunanza straordinaria per l'elezione del titolare.

Del Consiglio Direttivo.

Art. 16. — La direzione scientifica della Società è affidata ad un *Consiglio Direttivo*, il quale funziona da comitato di redazione della rivista periodica « *Rendi-*

conti del Circolo Matematico di Palermo », secondo le norme di un suo regolamento interno.

Art. 17. — Il Consiglio Direttivo è composto di 20 membri, 5 residenti e 15 non residenti, eletti dall'intera società a scrutinio segreto. In ognuna delle due categorie risultano eletti i soci che riportano maggior numero di voti. Qualora l'elezione, per parità di voti, riuscisse indecisa fra due o più candidati, si procederà a votazioni di ballottaggio, alle quali prenderanno parte soltanto i soci presenti all'adunanza.

Il Consiglio Direttivo rimane in carica tre anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 18. — Per l'elezione del Consiglio Direttivo si terrà apposita adunanza straordinaria nella terza domenica di gennajo.

Ogni socio non residente, come ogni socio residente che non possa intervenire alla detta adunanza, invierà, in una lettera da lui sottoscritta e diretta al Presidente, una scheda chiusa e suggellata indicante 20 nomi di soci, dei quali: 5 residenti e 15 non residenti.

Saranno considerate nulle le schede che non soddisfino a tutte le condizioni sopra stabilite o che pervengano all'Ufficio di Presidenza dopo le ore 3 pomeridiane del suindicato giorno.

Lo spoglio delle schede sarà fatto dal Presidente assistito dai segretari.

Art. 19. — Non vi è incompatibilità di carica fra i membri dell'Ufficio di Presidenza ed i membri residenti del Consiglio Direttivo.

Art. 20. — Entrando in carica, il Consiglio Direttivo delegherà uno dei suoi membri residenti a dirigere la pubblicazione dei Rendiconti.

Delle adunanze.

Art. 21. — Le adunanze ordinarie del Circolo si terranno la seconda e la quarta domenica del mese. La società prende due mesi di vacanza : settembre ed ottobre. Il Presidente, ove lo reputi opportuno, può, in ogni tempo, convocare i soci residenti in adunanza straordinaria.

Art. 22. — Nelle adunanze, in caso di assenza del Presidente e del Vice Presidente, il più anziano di età fra i soci presenti funzionerà da Presidente. In caso di assenza dei Segretari e dei Vice Segretari, chi presiede inviterà uno dei soci presenti a farne le veci.

Art. 23. — Entro il mese di gennajo, di ogni anno, il Presidente convocherà i soci residenti in apposita adunanza straordinaria per la revisione dei conti dell'anno decorso e l'approvazione del bilancio di previsione.

Art. 24. — Nelle adunanze del Circolo non è ammessa alcuna comunicazione o discussione sopra argomenti estranei all'indole scientifica e allo scopo della Società.

Art. 25. — Tutto ciò che riferiscesi all'amministrazione del Circolo, può essere trattato, esclusivamente, nelle adunanze straordinarie, per le quali il Presidente formulerà e parteciperà, con precedenza, ai soci residenti, apposito ordine del giorno.

Art. 26. — Le dimissioni da socio del Circolo non possono essere oggetto di discussione nè di votazione.

Art. 27. — Nelle adunanze ordinarie il Circolo è legalmente costituito qualunque sia il numero dei soci presenti.

Nelle adunanze straordinarie, tranne quelle di cui agli Art. 15 e 18, è necessaria una seconda convocazione quando nella prima non sia intervenuta almeno la metà più uno dei soci residenti.

Art. 28. — Nelle adunanze ordinarie le Comunicazioni dei soci residenti si succedono per ordine d'iscrizione. Saranno precedute dalla lettura che farà il Segretario dei titoli delle Comunicazioni dei soci non residenti, pervenute all'Ufficio di Presidenza nell'intervallo tra un'adunanza e l'altra.

Art. 29. — Rientra nelle speciali attribuzioni del Presidente tutto ciò che riferiscesi al regolamento delle adunanze ordinarie e straordinarie.

Art. 30. — I soci non residenti che si trovino temporaneamente in Palermo godono di tutti i diritti dei residenti e partecipano alle votazioni, meno quelle di cui agli Art. 15, 23 e 45.

Art. 31. — Le persone estranee che desiderano assistere alle adunanze ordinarie del Circolo, debbono, ciascuna volta, essere introdotte da uno dei soci.

Dei Rendiconti.

Art. 32. — Nei *Rendiconti* del Circolo si pubblicano, per obbligo:

1.° Gli *Estratti dai verbali* delle adunanze (redatti dai Segretari) i quali contengono il titolo e, ove occorra, un breve cenno, delle comunicazioni dei soci.

2.° Le Note e le Memorie originali comunicate dai soci ed accettate per la stampa dal Comitato di redazione.

3.° Un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

a) il sommario degli articoli di matematica contenuti nelle pubblicazioni *periodiche* (atti di Accademie, riviste, giornali, etc.) colle quali il Circolo scambia i suoi Rendiconti;

b) l'elenco delle pubblicazioni di matematica *non periodiche* (opere, memorie, note, etc.) che pervengono in dono alla biblioteca del Circolo.

Art. 33. — Per tutto che concerne la rivista *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, il Consiglio Direttivo potrà attuare quelle riforme ed estensioni che stimerà opportune per accrescerne l'importanza scientifica e meglio soddisfare alle esigenze dei cultori delle scienze matematiche.

Art. 34. — Gli *Estratti dai verbali* non riproducono le discussioni scientifiche che si fanno nelle adunanze del Circolo; tuttavia se i soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a rimettere al Segretario, nell'adunanza istessa, una Nota per iscritto, la quale, in ogni caso, non potrà eccedere lo spazio di una pagina dei Rendiconti.

Art. 35. — Le Note, Memorie e Riviste bibliografiche destinate ai Rendiconti dovranno essere inedite e scritte in una delle seguenti lingue: italiana, latina, spagnuola, francese, tedesca, inglese; non potranno pubblicarsi a parte o inserirsi in altri periodici scientifici se non dopo che saranno state pubblicate dal Circolo. Gli Autori ne assumono, essi soli, la responsabilità scientifica.

UFFICIO DI PRESIDENZA

PEL BIENNIO 1890-91.

Albeggiani (G.), presidente — **Caldarera**, vice presidente — **Albeggiani** (M.L.) e **Guccia**, segretari — **D'Arone** e **Pepoli**, vice segretari — **Porcelli**, tesoriere — **Morisani** e **Bentade**, bibliotecari.

CONSIGLIO DIRETTIVO

(Comitato di redazione dei *Rendiconti*)

PEL TRIENNIO 1888-89-90.

Residenti: **Albeggiani** (G.), **Albeggiani** (M. L.), **Caldarera**, **Gebbia**, **Guccia**.

Non residenti: **Battaglini** (Napoli), **Beltrami** (Pavia), **Bertini** (Pavia), **Betti** (Pisa), **Brioschi** (Milano), **Casorati** (Pavia), **Cerruti** (Roma), **Cremona** (Roma), **Del Pezzo** (Napoli), **De Paolis** (Pisa), **D' Ovidio** (Torino), **Jung** (Milano), **Pincherle** (Bologna), **Segre** (Torino), **Volterra** (Pisa).

Delegato dal Consiglio per dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti* (Art. 20 dello Statuto): **Guccia**.

EFFEMERIDE DELLE ADUNANZE ORDINARIE PEL 1890.

Gennajo	12, 26	Luglio	13, 27
Febbrajo	9, 23	Agosto	10, 24
Marzo	9, 23	Settembre	vacanze
Aprile	13, 27	Ottobre	vacanze
Maggio	11, 25	Novembre	9, 23
Giugno	8, 22	Dicembre	14, 28

Ore 3 p. m. precise.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

DATA DELLA NOMINA

1884, 2 marzo. **Paternò** Francesco Paolo, ingegnere, libero docente di Geometria descrittiva ed inc. di Geometria projettiva con disegno nella R. Università ;' prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico di Palermo — *Via S. Alessandro, 37.*

1884, 2 marzo. **Pepoli** Alessandro, ingegnere, prof. nella R. Scuola Tecnica Gagini, consigliere comunale — *Via Candelai, 19.*

1887, 13 febbrajo. **Pertica** Emanuele, ingegnere — *Via Macqueda, Piazzetta Stimmate, 8.*

1884, 2 marzo. **Pintacuda** Carlo, ingegnere, prof. straord. di Meccanica applicata alle macchine ed inc. di Costruzioni stradali e ferroviarie nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo, consigliere comunale — *Via Gagini, 73.*

1884, 2 marzo. **Politi** Giuseppe, ingegnere presso la Società Italiana delle Strade Ferrate della Sicilia — *Via delle Pergole 14.*

1884, 2 marzo. **Porcelli** Salvatore, ingegnere — *Via Lolli, 2ª traversa Ferrovia, fondo Dabbene.*

1886, 7 febbrajo. **Rotigliano** Salvatore, ingegnere, assistente alla cattedra di Costruzioni stradali e di Meccanica applicata alle macchine nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via Rosario Di Gregorio, 15.*

1884, 2 marzo. **Salemi-Pace** Giovanni, ingegnere, prof. straord. di Meccanica applicata alle costruzioni ed inc. di Geometria pratica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via Lincoln, 92.*

1887, 4 dicembre. **Siragusa** Annibale, ingegnere — *Via Patania, 2.*

1886, 4 aprile. **Taschetti** Giuseppe, prof. nel R. Ginnasio Umberto I in Palermo — *Via Principe Scordia, 21.*

1888, 9 settembre. **Tomasini** Barone Francesco — *Università, Gabinetto di Fisica.*

1888, 8 aprile. **Tripiciano** Giuseppe, ingegnere — *Via Bara, 60.*

1888, 5 febbrajo. **Venturi** Adolfo, dottore in Matematica, prof. straord. di Geodesia teoretica ed inc. di Meccanica celeste nella R. Università di Palermo — *Via Cuba, casa Giardina.*

1886, 7 febbrajo. **Zona** Temistocle, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, etc., 2° astronomo nel R. Osservatorio Astronomico di Palermo, libero docente di Astronomia ed inc. di Geografia fisica nella R. Università di Palermo — *Palazzo Reale.*

NON RESIDENTI

DATA DELLA NOMINA

1888, 12 agosto. **Amaturo** Enrico, dottore in Matematica, ingegnere, assistente alla cattedra di Geometria descrittiva nella R. Università di Napoli. — *Via S. Giuseppe dei Ruffi, 6 — Napoli.*

1887, 24 aprile. **Amodeo** Federico, dottore in Matematica, libero docente di Geometria projettiva nella R. Università di Napoli.—*Vico Noce a Fonseca, 9 — Napoli.*

1888, 11 marzo. **Arzelà** Cesare, dottore in Matematica, prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*

1888, 26 agosto. **Basile** Ernesto, architetto, inc. di Architettura tecnica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma.—*Via Venti Settembre, 98 A — Roma.*

1888, 11 marzo. **Bassani** Anselmo, dottore in Matematica, professore di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*

1886, 5 dicembre. **Battaglini** Giuseppe (*), uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro della R. Accademia delle Scienze di Napoli, socio della Pontaniana; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Bologna, Torino, del R. Istituto Veneto; membro del Consiglio superiore di P. I.; prof. ord. di Calcolo differenziale ed integrale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Napoli. — *Vico Volpicelli a Santa Chiara, 20 — Napoli.*

1888, 4 marzo. **Beltrami** Eugenio (**), corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio nazionale non residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, socio effettivo pensionato della R. Accademia delle Scienze di Bologna; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Modena, Napoli, delle Società Reali delle Scienze di Gottinga e di Liegi, della Società Filomatica di Parigi; prof. onorario della R. Università di Bologna; prof. ord. di Fisica matematica ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*

1888, 4 marzo. **Bertini** Eugenio, dottore in Matematica, corrispondente del R. Istituto Lombardo; direttore della Scuola Normale, prof. ord. di Geometria superiore ed inc. di Esercitazioni della Geo-

(*) Cav. dell'Ordine del Merito Civile di Savoia. (**) Idem.

DATA DELLA NOMINA

metria superiore nella R. Università di Pavia. — *Piazza Castello, 22 — Pavia.*

1887, 4 dicembre. **Bersolari** Luigi, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo ed assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*

1887, 18 dicembre. **Betti** Enrico (*), senatore del Regno, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, Napoli, del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto Veneto, della Società Reale delle Scienze di Gottinga; membro onorario della Società Matematica di Londra; membro del Consiglio superiore di P. I.; prof. ord. di Fisica matematica ed inc. di Astronomia e Meccanica celeste nella R. Università di Pisa; direttore della R. Scuola Normale superiore di Pisa. — *Pisa.*

1888, 9 settembre. **Bordiga** Giovanni, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Venezia. — *Palazzo Piovene, Traghetto della Maddalena — Venezia.*

1889, 14 luglio. **Bortolotti** Ettore, dottore in Matematica, assistente alle cattedre di Algebra e Calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna. — *Via Fondazza, 67 — Bologna.*

1887, 4 dicembre. **Brambilla** Alberto, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Vittorio Emanuele di Napoli. — *Napoli.*

1888, 5 febbrajo. **Breglia** Ernesto, ingegnere, assistente alla cattedra di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *Via S. Nicandro, 8 — Napoli.*

1887, 20 novembre. **Brioschi** Francesco (**), senatore del Regno, presidente della R. Accademia dei Lincei, corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio nazionale non residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Napoli; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, delle Società Reali delle Scienze di Gottinga e di Praga; membro onorario della Società Matematica di Londra, membro della Società Matematica di Francia; membro del Consiglio superiore di P. I; prof. emerito della R. Università di Pavia; prof. ord. d'Idraulica e direttore del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. — *Via Senato, 38 — Milano.*

(*) Cav. dell'Ordine del Merito Civile di Savoia. (**) Idem.

DATA DELLA NOMINA	
1889, 10 marzo.	**Burali-Forti** Cesare, dottore in Matematica, prof. nella R. Accademia Militare di Torino. — *Via Gioberti, 43 — Torino.*
1884, 2 marzo.	**Capelli** Alfredo, dottore in Matematica, socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ordinario di Algebra complementare ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Napoli.—*Salita Magnocavallo, 29—Napoli.*
1888, 4 marzo.	**Casorati** Felice (*), uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro effettivo del R. Istituto Lombardo; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, Palermo, Torino, della Società Reale delle Scienze di Gottinga; prof. ordinario di Analisi infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*
1889, 13 gennajo.	**Castelnuovo** Guido, dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino. — *Piazza Statuto, 3 — Torino*; ovvero: *Santa Fosca — Venezia.*
1886, 5 dicembre.	**Catalan** Eugène, già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, professore emerito dell'Università di Liegi, associato della R. Accademia del Belgio, dell'Accademia delle Scienze di Tolosa e della Società delle Scienze di Lilla; corrispondente delle Accademie delle Scienze di Pietroburgo e di Torino, dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, della Società Matematica di Amsterdam, dell'Istituto nazionale ginevrino; membro effettivo della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Società Filomatica di Parigi, della Società Matematica di Francia. — *Rue des Eburons, 21 — Liège.*
1885, 8 febbrajo.	**Cavallaro** Francesco, dottore in Matematica, prof. nella Regia Scuola Tecnica di Cefalù. — *Cefalù (Sicilia).*
1886, 5 dicembre.	**Cerruti** Valentino, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro dell'Accademia Leopoldino-Carolina de' Curiosi della natura, membro della Società Matematica di Francia; rettore, prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Roma.—*Via D'Azeglio, 16— Roma.*
1888, 11 marzo.	**Chizzoni** Francesco, ingegnere, prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno nella R. Università di Catania. — *Catania.*

(*) Cav. dell'Ordine del merito Civile di Savoia.

DATA DELLA NOMINA

1885, 8 febbrajo. **Conti** Ignazio, dottore in Matematica prof. nel R. Istituto Tecnico di Modica. — *Modica (Sicilia).*

1887, 4 dicembre. **Costa** Gregorio, dottore in Fisica, ingegnere, assistente alla cattedra di Fisica tecnica nella R. Scuola d'applicazione per gli Ingegneri e prof. di Fisica sperimentale nel Collegio Militare di Napoli. — *Via Tribunali, 194 — Napoli.*

1887, 20 novembre. **Cremona** Luigi (*), senatore del Regno, *LL. D. Edinb., Foreign F. R. S., Hon. F. C. P. S.;* uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio nazionale non residente della R. Accademia delle Scienze di Torino, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio delle Reali Accademie delle Scienze di Amsterdam, Bologna, Monaco, Napoli, delle Società Reali delle Scienze di Copenhagen, Gottinga, Liegi, Praga, della Società Matematica di Francia, di Praga; corrispondente della Società Filomatica di Parigi; membro onorario della Società Matematica di Londra, della Società Filosofica di Cambridge, dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; prof. onorario nella R. Università di Bologna; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Roma, direttore della R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1887, 16 gennajo. **Dainelli** Ugo, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico Leonardo da Vinci. — *S. Pietro in Vincoli — Roma.*

1886, 5 dicembre. **Del Pezzo** Pasquale, duca di Cajanello, dottore in Matematica, membro della Società Matematica di Francia; prof. straord. di Geometria superiore nella R. Università di Napoli. — *Via Gennaro Serra, 75 — Napoli.*

1887, 13 febbrajo. **Del Re** Alfonso, dottore in Matematica, inc. di Geometria analitica e projettiva nella R. Università di Roma.—*Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1888, 4 marzo. **De Paolis** Riccardo, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, inc. di Statica grafica con disegno nella Scuola di applicazione per gl'Ingegneri in Pisa. — *Pisa.*

1887, 4 dicembre. **D'Ovidio** Enrico, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto

---

(*) Cav. dell'Ordine del Merito Civile di Savoia.

DATA DELLA NOMINA

Lombardo, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, socio dell'Accademia Pontaniana, membro della Società Matematica di Francia; prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Torino. — *Corso Oporto, 30 — Torino.*

1888, 26 agosto. **Fatta** Giuseppe, direttore del Ginnasio e prof. nella R. Scuola Normale Femminile di Petralia Sottana. — *Petralia Sottana (Sicilia).*

1887, 4 dicembre. **Fouret** Georges, già allievo della Scuola Politecnica, membro onorario della Società Filomatica di Parigi, già Presidente della Società Matematica di Francia; esaminatore d'ammissione e ripetitore di Meccanica alla Scuola Politecnica. — *Rue Washington, 16 — Paris.*

1889, 12 maggio. **Frattini** Giovanni, dottore in Matematica, libero docente di Algebra nella R. Università e prof. nel R. Istituto Tecnico e nel R. Collegio Militare di Roma. — *Roma.*

1888, 8 luglio. **Gambardella** Filippo, professore di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*

1890, 9 febbrajo. **Giuliani** Giulio, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Macchiavelli di Lucca. — *Lucca.*

1888, 8 gennajo. **Grimaldi** Giovan Pietro, dottore in Fisica, libero docente in Fisica nelle RR. Università di Palermo e Roma, assistente alla cattedra di Fisica nella R. Università di Roma. — *Istituto Fisico — Roma.*

1887, 2 gennajo. **Hirst** Thomas Archer, *Ph. D. Marburg, F. R. S., F. R. A. S., Hon. F. C. P. S.;* membro del Senato dell'Università di Londra; membro della Società Matematica e della Società Fisica di Londra, della Società Matematica di Francia; corrispondente della Società Filomatica di Parigi e delle Società di Scienze Naturali di Halle e di Marburg. — *Athenæum Club — London.*

1887, 4 dicembre. * **Humbert** Georges, già allievo della Scuola Politecnica, ingegnere delle Mine, dottore in Scienze matematiche, membro titolare della Società Filomatica di Parigi, segretario della Società Matematica di Francia; ripetitore di Analisi alla Scuola Politecnica. — *Boulevard Malesherbes, 16 — Paris.*

1888, 9 settembre. **Jadanza** Nicodemo, dottore in Matematica, socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ordinario di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino; prof. straord. di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino — *Piazza B. V. degli Angeli, 2 — Torino.*

1889, 9 giugno. **Jordan** Camillo, membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), corrispondente del R. Isti-

DATA DELLA NOMINA

tuto Lombardo di Scienze e Lettere, membro della Società Filomatica di Parigi, della Società Matematica di Francia, dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze, etc.; ingegnere capo delle Mine; direttore del *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* professore al Collegio di Francia e alla Scuola Politecnica. — *Rue de Varennne, 48 — Paris.*

1887, 5 giugno.* **Jung** Giuseppe, dottore in Matematica, corrispondente del R. Istituto Lombardo, membro onorario dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; prof. ord. di Statica grafica e Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano.— *Via Principe Umberto, 7 — Milano.*

1889, 10 novembre. **Krause** Martin Johann, dottore in Filosofia, prof. ord. nel Politecnico di Dresda. — *Uhlandstrasse, 12, II — Dresden.*

1888, 11 marzo. **Lazzeri** Giulio, dottore in Matematica, prof. di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*

1889, 24 marzo. **Lebon** Ernest, aggregato di Matematiche (insegnamento speciale), membro dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; già prof. supplente di Geometria descrittiva al conservatorio di Arti e Mestieri di Parigi; prof. di Matematiche nel Liceo Carlomagno di Parigi; redattore capo del *Bulletin scientifique. — Rue de Mézières, 5 — Paris.*

1888, 13 maggio. **Le Paige** Constantin, dottore in scienze fisiche e matematiche, segretario generale della Società Reale delle Scienze di Liegi; corrispondente della R. Accademia del Belgio, dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Lisbona; membro straniero della Società Reale delle Scienze di Boemia, dell'Accademia Imperiale Alemanna Leopoldino-Carolina de' Curiosi della Natura; membro onorario della Società Matematica di Amsterdam; membro delle Società Matematiche di Francia e di Boemia; prof. ord. di Analisi e di Geometria superiore nella Università di Liegi. - *Rue des Anges, 21—Liège.*

1887, 4 dicembre. **Loria** Gino, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria superiore ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Genova. — *Genova.*

1884, 2 marzo. **Maisano** Giovanni, dottore in Matematica, prof. straord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Messina. — *Messina.*

1888, 13 maggio. **Marcolongo** Roberto, dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Meccanica razionale nella R. Università di Roma.— *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1886, 24 gennajo. **Martinetti** Vittorio, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria descrittiva e projettiva con disegno ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Messina. — *Messina.*

DATA DELLA NOMINA

1887, 13 febbrajo. **Masoni** Udalrigo, dottore in Matematica, ingegnere, libero docente di Meccanica razionale ed inc. di Idraulica teoretica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *S. Potito, 45 — Napoli.*

1888, 10 giugno. **Merlani** Adolfo, dottore in Matematica. — *Via Indipendenza, 19 — Bologna.*

1888, 13 maggio. **Mittag-Leffler** Gösta, dottore in Filosofia; membro dell'Accademia Reale delle Scienze di Svezia, della Società Reale delle Scienze di Upsala, della Società Reale delle Scienze di Norvegia, della Società delle Scienze di Finlandia, della Società Matematica di Francia, della Società Astronomica di Lipsia; membro onorario della Società Filosofica di Cambridge; corrispondente della Società Reale delle Scienze di Gottinga e della Società Reale delle Scienze di Liegi; redattore capo degli *Acta Mathematica;* prof. ord. di Analisi superiore nella Università di Stoccolma. — *Stockholm (Svezia).*

1887, 4 dicembre. **Mollame** Vincenzo, dottore in Matematica, prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica nella R. Università di Catania. — *Catania*

1888, 13 maggio. **Montesano** Domenico, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Bologna. — *Via San Felice, 14 — Bologna.*

1889, 27 gennajo. **Moore** Eliakim Hastings, Jr., dottore in Filosofia, membro dell'Accademia delle Scienze del Connecticut. — *426, Church str. — Evanston (Illinois). U. S. A.*

1887, 4 dicembre. **Morera** Giacinto, dottore in Matematica, prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Genova. — *Genova.*

1888, 8 gennajo. **Murer** Vittorio, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Spezia. — *Spezia.*

1889, 13 gennajo. **Padelletti** Dino, dottore in Matematica, membro della R. Accademia delle Scienze di Napoli, prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Napoli. — *Arco Mirelli, 36 — Napoli.*

1888, 13 maggio. **Panizza** Francesco, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Alessandria. — *Alessandria.*

1887, 4 dicembre. **Peano** Giuseppe, dottore in Matematica, prof. di Matematiche nella R. Accademia Militare, inc. delle Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino. — *Corso Valentino, 1 — Torino.*

1889, 10 marzo. **Pieri** Mario, dottore in Matematica, prof. nella R. Accademia militare di Torino. — *Torino.*

DATA DELLA NOMINA

1883, 11 marzo. **Pincherle** Salvatore, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei; prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*

1889, 24 febbrajo. **Pittarelli** Giulio, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria descrittiva e libero docente della Teoria delle forme algebriche nella R. Università; inc. delle Applicazioni di Geometria descrittiva nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma. — *Via Principe Umberto, 145 — Roma.*

1887, 4 dicembre. **Piuma** marchese Carlo Maria, prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. — *Via Consolazione, 49 — Genova.*

1887, 18 dicembre. **Platania** Giovanni. — *Via S. Giuseppe, 14 — Acireale (Sicilia).*

1889, 10 novembre. **Porro** Francesco, dottore in Fisica, inc. della Astronomia nella R. Università e della Direzione del R. Osservatorio Astronomico di Torino. — *Torino.*

1888, 14 ottobre. **Previtera** Carmelo. — *Vico Miradoli a Foria, 5 — Napoli.*

1888, 27 maggio. **Reggio** Giuseppe Zaccaria, dottore in Matematica; preside del R. Istituto Tecnico di Treviso. — *Treviso.*

1890, 12 gennajo. **Reina** Vincenzo, dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Geodesia nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1887, 27 febbrajo. **Retali** Virginio, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Como. — *Como.*

1887, 13 febbrajo. **Rindi** Scipione, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Pesaro. — *Pesaro.*

1888, 11 marzo. **Ruffini** Ferdinando Paolo, socio effettivo pensionato e vice presidente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, corrispondente del R. Istituto Veneto, prof. emerito della R. Università di Modena; prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Bologna; inc. di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Bologna. — *Bologna.*

1888, 5 febbrajo. **Ruggiero** Pietro, ingegnere, assistente alla cattedra di Resistenza di Materiali nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *Via S. Carlo alle Mortelle, 26 — Napoli.*

1888, 26 agosto. **Russo** Giovanni, professore di Matematica, membro della Società Matematica di Francia e dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; prof. titolare di Matematica nella Scuola Tecnica pareggiata di Catanzaro. — *Discesa Case Arse, 2 — Catanzaro.*

1889, 28 aprile. **Sadun** Elda, dottore in Matematica, prof. nella R. Scuola Tecnica Pietro della Valle e nel R. Collegio militare di Roma. — *Via Clementina, 3 — Roma.*

DATA DELLA NOMINA

1887, 4 dicembre. **Salvatore-Dino** Nicola, corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ord. di Geometria descrittiva nella R. Università di Napoli. — *Portici.*

1888, 11 marzo. **Sannia** Achille, ingegnere, ex-deputato al Parlamento nazionale, presidente dell'Accademia Pontaniana, presidente della sezione di Architettura dell'Associazione nazionale Italiana degli scienziati, letterati ed artisti; prof. ord. di Geometria projettiva nella R. Università di Napoli; R. Commissario della Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli.—*Largo Tarsia, 2—Napoli.*

1888, 13 maggio. **Schlegel** Victor, dottore in Filosofia, membro della Società Matematica di Francia. — *Hagen i/w. (Germania).*

1887, 27 luglio. **Segre** Corrado, dottore in Matematica, socio residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; prof, straord. di Geometria superiore nella R. Università di Torino. — *Via Juvara, 20 — Torino.*

1888, 24 giugno. **Sforza** Giuseppe, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Foggia. — *Foggia.*

1886, 13 giugno. **Spina Cimino** Raffaele, prof. nella R. Scuola Normale di Lacedonia. — *Lacedonia.*

1888, 8 aprile. **Starkoff** Alexis, membro della Società Matematica di Francia, della Società dei Naturalisti della Nuova Russia, della Sezione Matematica del Kazan e della Società Tecnica di Odessa. — *Deribasowskaja, 6 — Odessa.*

1887, 4 dicembre. **Tonelli** Alberto, dottore in Matematica, prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1888, 24 giugno. **Torelli** Gabriele, dottore in Matematica, socio residente dell'Accademia Pontaniana, prof. nel R. Istituto Tecnico, coadjutore per la cattedra di Calcolo e per le esercitazioni di Algebra e Geometria e libero docente di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Napoli.—*S. Spirito di Palazzo, 41— Napoli.*

1887, 2 gennajo. **Vaněček** J.-S., corrispondente delle Società Reali delle Scienze di Praga e di Liegi e della Società Filomatica di Parigi, membro della Società Matematica di Francia; prof. nel Liceo di Jičín. — *Jičín (Boemia).*

1887, 2 gennajo. **Vaněček** M.-N., membro della Società Matematica di Francia; professore di Matematica a *Králové Hradec (Boemia).*

1888, 11 marzo. **Veronese** Giuseppe, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Padova.—*Padova.*

DATA DELLA NOMINA

1889, 10 febbrajo. **Visalli** Pietro, dottore in Matematica, libero docente nella R. Università di Messina, prof. nella R. Accademia navale di Livorno. — *Livorno.*

1887, 18 dicembre. **Vivanti** Giulio, dottore in Matematica, ingegnere. — *Mantova.*

1887, 4 dicembre. **Volterra** Vito, dottore in Fisica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Pisa. — *Pisa.*

SOCI DEFUNTI

Cacciatore Prof. Comm. Gaetano.

SOCI DIMISSIONARI

La Farina Ing. Enrico — **Ciollaro** Ing. Gustavo — **Del Vecchio** Giacomo.

RADIATI DALL'ELENCO DEI SOCI IN VIRTÙ DELL'ART. 10 DELLO STATUTO

D'Angelo Ing. Francesco Paolo — **Maggiacomo** Prof. Filippo.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI PERIODICHE

COLLE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Acta Mathematica, journal rédigé par G. MITTAG-LEFFLER (Stockholm).

American Journal of Mathematics (SIMON NEWCOMB, Editor; THOMAS CRAIG, Associate Editor), published under the Auspices of the *Johns Hopkins University.* (Baltimore).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté. (Toulouse).

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti dal prof. F. BRIOSCHI. (Milano).

Annals of Mathematics (ORMOND STONE, Editor; W. M. THORNTON, R. S. WOODWARD, Associate Editors). (University of Virginia).

Annual Report of the Board of Regents of the *Smithsonian Institution.* (Washington).

Atti della *R. Accademia delle Scienze di Torino.*

Atti del *Collegio degli Ingegneri e degli Architetti di Palermo.*

Atti del *R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* (Venezia).

Berichte über die Verhandlungen der *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.*

Berichte des *Naturwissenschaftlich-medizinischen Wereines in Innsbruck.*

Bibliotheca Mathematica, journal d'histoire des mathématiques, publié par GUSTAF ENESTRÖM. (Stockholm).

Bulletin de l'*Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique.* (Bruxelles).

Bulletin de la *Société Mathématique de France.* (Paris).

Bulletin de la *Société Philomatique de Paris.*

Bulletin des Sciences Mathématiques, redigé par MM. GASTON DARBOUX et JULES TANNERY. (Paris).

Bulletin Scientifique, journal rédigé par M. ERNEST LEBON. (Paris).

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky který se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje prof. AUGUSTIN PÁNEK a vydává *Jednota Českých Mathematiků* (Praze).

Compte-rendu sommaire des séances de la *Société Philomatique de Paris.*

Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'*Académie des Sciences de Paris.*

Comptes Rendus de l'*Association Française pour l'avancement des Sciences.*

Comunicazioni e protocolli delle sedute della *Società Matematica di Karkoff.*

Crónica Cientifica, revista internacional de Ciencias redactada por Don RAFAEL ROIG Y TORRES. (Barcelona).

Educational Times (The) and Journal of the College of Preceptors. (London).

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, pubblicato per cura del prof. G. BATTAGLINI. (Napoli).

Giornale di Scienze Naturali ed Economiche, pubblicato per cura della *Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo.*

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begründet von CARL OHRTMANN; im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren FELIX MÜLLER und ALBERT WANGERIN herausgegeben von MAX HENOCH und EMIL LAMPE. (Berlin).

Jahresbericht der *Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.* (Prag).

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, publicado pel Dr. F. GOMES TEIXEIRA. (Coimbra).

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS et LUCIEN LÉVY. (Paris).

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par JOSEPH LIOUVILLE, publié de 1875 à 1884 par H. RESAL; 4ème série publiée par CAMILLE JORDAN. (Paris).

Journal de Mathématiques spéciales, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS et LUCIEN LÉVY. (Paris).

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. CRELLE 1826; herausgegeben—unter Mitwirkung der Herren WEIERSTRASS, VON HELMHOLTZ, SCHROETER, FUCHS — von L. KRONECKER. (Berlin).

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des Ecoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION et J. NEUBERG. (Gand).

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'*Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.*

Mémoires de l'*Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.*

Mémoires de la *Société Royale des Sciences de Liège.*

Mémoires de la section mathématique de la *Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.* (Odessa).

Memoirs of the *National Academy of Sciences* (Washington).

Memorie della *R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.*

Memorie della *Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).* (Roma).

Nachrichten von der *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen.*

Nieuw Archief voor Wiskunde. (Amsterdam).

Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ. (Paris).

Nuovo Cimento (Il), giornale fondato per la Fisica e la Chimica da C. MATTEUCCI e R. PIRIA, continuato per la Fisica sperimentale e matematica da E. BETTI e R. FELICI. (Pisa).

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario, diretto da DAVIDE BESSO ed AURELIO LUGLI. (Roma).

Philosophical Transactions of the *Royal Society of London* (Series A).

Proceedings and Transactions of the *Nova Scotian Institute of Natural Science* (Halifax, Nova Scotia, Canada).

Proceedings of the *Cambridge Philosophical Society.*

Proceedings of the *Canadian Institute* (Toronto).

Proceedings of the *London Mathematical Society.*

Proceedings of the *Royal Society of London.*

Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo.

Raccolta matematica della *Società Matematica di Mosca.*

Rendiconti della *R. Accademia dei Lincei.* (Roma).

Rendiconti della *R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.*

Rendiconti del *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*. (Milano).

Revue Scientifique (revue rose), dirigée par M. CHARLES RICHET. (Paris).

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der *Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München*.

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der *Kl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*. (Prag).

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Wien*.

Tidsskrift for Mathematik (Nyt), redigeret af cand. mag. P. T. FOLDBERG og. dr. phil. C. JUEL (Kjöbenhavn).

Transactions of the *Cambridge Philosophical Society*.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen door de Leden van het *Wiskundige Genootschap*, ter spreuke voerende : « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven ». (Amsterdam).

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR. (Leipzig).

L' HESSIANO DELLA SESTICA BINARIA

E IL DISCRIMINANTE DELLA FORMA DELL'OTTAVO ORDINE

Nota IIª del prof. **G. Maisano**, in Messina.

Adunanza del 10 novembre 1889.

I risultati della precedente Nota (*) convenientemente si applicano ad esprimere il discriminante Δ della forma dell'ottavo ordine per mezzo dei nove invarianti fondamentali. Infatti l'Hessiano della Sestica è una forma dell'ottavo ordine, la quale, come sarà dimostrato nella 3ª Nota, sodisfa a cinque relazioni rispettivamente dei gradi 24, 28, 32, 36 e 40; epperò il suo discriminante, invariante del 14° grado, non può differire da quello della forma *generale* dello stesso ordine. D'altra parte nella Memoria *La Sestica binaria* a pag. 38 è dimostrato che il discriminante dell'Hessiano si scompone nel prodotto del discriminante della Sestica fondamentale per l'invariante R_{jH}. Non resta dunque che a scrivere l'identità:

$$\alpha J_2^7 + \beta J_2^5 J_4 + \gamma J_2^4 J_6 + \ldots = D_f \cdot R_{jH} \qquad (1)$$

e a determinare le 31 incognite α, β, γ, ..., dopo d'aver sostituito a.

(*) Questi *Rendiconti*, tomo III (1889), p. 53-59.

J_2, J_3, J_4, ... l'espressioni della Nota precedente e a D_f, R_{jH} i valori:

$$D_f = -2^7.3A^5 + 2^4.3.5^3A^3B + 2^4.5^4A^2C - 2.3.5^5AB^2 - 2^2.3.5^5BC \\ -3^2.5^5D, \tag{2}$$

$$R_{jH} = 3^8DK^2 - 2^2.3^3AK^4 - 3^5K^3A_u + 2^2.5A^3K^3 - 3^3A^2K^2A_u \\ -2^2.3^5AKA_u^2 - 2^4.3^6.A_u^3, \tag{3}$$

che trovansi alle pagine 32 e 38 della citata Memoria.

Però alla identità (1) crediamo conveniente sostituirne un'altra, dopo d'aver messo il discriminante Δ sotto una novella forma, al quale intento cominciamo con lo stabilire le relazioni fra gl'invarianti di una forma dell'ottavo ordine con un elemento triplo.

Assumendo come punti fondamentali l'elemento triplo e il centro armonico di esso rispetto agli altri cinque possiamo dare alla forma l'espressione seguente:

$$\varphi = 56a_3x_1^5x_2^3 + 56a_5x_1^3x_2^5 + 28a_6x_1^2x_2^6 + 8a_7x_1x_2^7 + a_8x_2^8,$$

dalla quale facilmente deduconsi gl'invarianti fondamentali. Si ha infatti:

$$k = -2^2.5a_3^2x_1^4 + 2^2.17a_3a_5x_1^2x_2^2 + 2^2.3^2a_3a_6x_1x_2^3 - (2^2.3a_3a_7 + 2^2.5a_5^2)x_2^4,$$

$$h = -\frac{2^4.5.17}{3}a_3^3a_5x_1^4 - 2^4.3^2.5a_3^3a_6x_1^3x_2 + 2^3\left(2^2.3.5a_3^3a_7 + \frac{11}{3}a_3^2a_5^2\right)x_1^2x_2^2 \\ -2^3.3.17a_3^2a_5a_6x_1x_2^3 - 2\left(2^3.17a_3^2a_5a_7 + 3^4a_3^2a_6^2 + \frac{2^3.5.17}{3}a_3a_5^3\right)x_2^4,$$

$$g = 2^4.3a_3^2x_1^6x_2^2 - 2^3.3^2a_3a_5x_1^4x_2^4 - 2^5.3a_3a_6x_1^3x_2^5 + 2^4(-a_3a_7 + 3a_5^2)x_1^2x_2^6 \\ + 2^3(a_3a_8 + 2a_5a_6)x_1x_2^7 + 2(3a_6^2 - 2^2a_5a_7)x_2^8,$$

$$(\varphi k)^4\varphi_x^4 = 2^6.3a_3^2a_5x_1^3x_2 - 2^4.3.7a_3^2a_6x_1^2x_2^2 + 2^6(-2a_3^2a_7 + 3a_3a_5^2)x_1x_2^3 \\ + 2^2(2^3a_3a_5a_6 - 5a_3^2a_8)x_2^4,$$

$$(\varphi b)^4\varphi_x^4 = 2^4.3^2.5a_3^4a_6x_1^4 + 2^5(2^2.3.5a_3^4a_7 - 53a_3^3a_5^2)x_1^3x_2 + 2^4.253a_3^3a_5a_6x_1^2x_2^2$$

$$+\left(-\frac{2^7.23}{3}a_3^3a_5a_7 + 2^3.3^2.31a_3^3a_6^2 - 2^5.53a_3^2a_5^3\right)x_1x_2^3$$

$$+\frac{2^4}{3}(-5.17a_3^3a_5a_8 + 3^2.5^2a_3^3a_6a_7 + 2.41a_3^2a_5^2a_6)x_2^4,$$

$$(gk)^4g_x^4 = \frac{2^6.3.5}{7}a_3^3a_5x_1^4 - \frac{2^8.3}{7}a_3^3a_6x_1^3x_2 - \frac{2^5.3}{5.7}(2^2.5a_3^3a_7 + 3.101a_3^2a_5^2)x_1^2x_2^2$$

$$-\frac{2^4}{5.7}(5^2.7a_3^3a_8 + 2.523a_3^2a_5a_6)x_1x_2^3$$

$$+\frac{2^3}{5.7}(2^3.73a_3^2a_5a_7 - 3.5.17a_3^2a_6^2 + 2^3.3.5^2a_3a_5^3)x_2^4,$$

$$(gb)^4g_x^4 = \frac{2^5}{7}(2^2.3^2.5a_3^5a_7 + 113a_3^4a_5^2)x_1^4 + 2^7.23a_3^4a_5a_6x_1^3x_2$$

$$-\frac{2^4}{5.7}(2^4.5^2.23a_3^4a_5a_7 + 3^4.5.7^2a_3^4a_6^2 + 2^2.3.1733a_3^3a_5^3)x_1^2x_2^2$$

$$-\frac{2^6}{3.5.7}(5^2.7.17a_3^4a_5a_8 + 2^2.3^4.5^2a_3^4a_6a_7 + 2.467a_3^3a_5^2a_6)x_1x_2^3$$

$$+\frac{2^3}{3.5.7}(2^2.3.5.113a_3^2a_5^4 - 3.7.11.103a_3^3a_5a_6^2 - 2^4.3^2.5^2.a_3^4a_7^2$$

$$+ 2^2.7.2209a_3^3a_5^2a_7 + 2.3^3.5^2.7.a_3^4a_6a_8)x_2^4,$$

da cui segue:

$$J_2 = (\varphi\varphi)^8 = -2^4.7a_3a_5,\ J_3 = (\varphi g)^8 = 2^4.3^2a_3^2a_6,\ J_4 = (kk)^4 = 2^5.3.5a_3^3a_7$$

$$+\frac{2^3.589}{3}a_3^2a_5^2,$$

$$J_5 = -2^5.193a_3^3a_5a_6 + 2^4.5^2a_3^4a_8,\ J_6 = -\frac{2^8.3^3.5}{7}a_3^4a_5a_7$$

$$+\frac{2^5.3.157}{7}a_3^4a_6^2 - \frac{2^6.3.11.247}{5.7}a_3^3a_5^3,$$

$$J_7 = \frac{2^6.1781}{3}a_3^4a_5^2a_6 + \frac{2^6.5^2.17}{3}a_3^5a_5a_8 - 2^8.3.5.13a_3^5a_6a_7,$$

$$J_8 = -\frac{2^{10}.3^2.5^3}{7} a_3^5 a_5^2 a_7 - 2^7.727\, a_3^5 a_5 a_6^2 - \frac{2^7.35111}{5.7} a_3^4 a_5^4$$
$$- 2^6.3^2.5^2 a_3^6 a_6 a_8 - \frac{2^{11}.3.5}{7} a_3^6 a_7^2 ,$$
$$J_9 = \frac{2^8.5^2.17^2}{3^2} a_3^6 a_5^2 a_8 - 2^9.5^2.31 a_3^6 a_5 a_6 a_7 - \frac{2^7.69127}{3^2} a_3^5 a_5^3 a_6 + 2^6.3^4.5.11 a_3^6 a_6^3 ,$$
$$J_{10} = -\frac{2^8.211163}{3.5.7} a_3^5 a_5^5 + \frac{2^7.5^2.5851}{3.7} a_3^6 a_5^2 a_6^2 - \frac{2^{12}.5.149}{7} a_3^7 a_5 a_7^2$$
$$- \frac{2^{11}.3^2.1303}{7} a_3^6 a_5^3 a_7 - \frac{2^9.3^4.5.59}{7} a_3^7 a_6^2 a_7 - 2^9.3.5^2.17 a_3^7 a_5 a_6 a_8 .$$

Dai valori di J_2, J_3, J_4, J_5 si ottengono linearmente $a_3 a_5$, $a_3^2 a_6$, $a_3^3 a_7$, $a_3^4 a_8$ in funzione degli stessi invarianti e sostituendo nelle espressioni di J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10} si ha senz'altro:

$$J_6 - \frac{3^2}{2.7^2} J_2 J_4 - \frac{157}{2^3.3^3.7} J_3^2 + \frac{3^2.19}{2^4.5.7^4} J_2^3 = 0 , \tag{4}$$
$$J_7 + \frac{17}{2^2.3.7} J_2 J_5 + \frac{13}{2.3^2} J_3 J_4 - \frac{2.5^3}{3^3.7^2} J_2^2 J_3 = 0 , \tag{5}$$
$$J_8 + \frac{1}{2^2} J_3 J_5 + \frac{2}{3.5.7} J_4^2 + \frac{199}{2^2.3^2.5.7^2} J_2^2 J_4 - \frac{11}{3^4} J_2 J_3^2$$
$$- \frac{2^2.11.17}{3^3.5.7^4} J_2^4 = 0 , \tag{6}$$
$$J_9 - \frac{17^2}{2^4.3^2.7^2} J_2^2 J_5 - \frac{5.31}{2^4.3^3.7} J_2 J_3 J_4 - \frac{5.11}{2^6.3^2} J_3^3 + \frac{61319}{2^7.3^4.7^3} J_2^3 J_3 = 0 , \tag{7}$$
$$J_{10} - \frac{17}{2^3.3.7} J_2 J_3 J_5 - \frac{149}{2^2.3^2.5.7^2} J_2 J_4^2 + \frac{59}{2^4.3.7} J_3^2 J_4$$
$$- \frac{8891}{2^5.3^3.5.7^4} J_2^3 J_4 + \frac{5081}{2^5.3^5 7^2} J_2^2 J_3^2 + \frac{11.13583}{2^6.3^4.5.7^5} J_2^5 = 0. \tag{8}$$

Si può intanto conchiudere che:

Gl'invarianti di una forma dell'ottavo ordine con un elemento triplo devono sodisfare alle cinque relazioni precedenti.

Ciò premesso, poichè la condizione

$$\Delta = 0$$

dev'essere identicamente sodisfatta dalle (4), (5), (6), (7), (8), si può scrivere, a meno di un fattore numerico, la seguente identità:

$$\begin{aligned}
\Delta \equiv (\lambda_1 J_4 + \lambda_2 J_2^2)(J_{10} &- \frac{17}{2^3.3\cdot 7} J_2 J_3 J_5 - \frac{149}{2^2.3^2.5\cdot 7^2} J_2 J_4^2 + \frac{59}{2^4.3\cdot 7} J_3^2 J_4 \\
&- \frac{8891}{2^5.3^3.5\cdot 7^4} J_2^3 J_4 + \frac{5081}{2^5.3^5.7^2} J_2^2 J_3^2 + \frac{11.13583}{2^6.3^4.5\cdot 7^5} J_2^5 \\
+(\mu_1 J_5 + \mu_2 J_2 J_3)(J_9 &- \frac{17^2}{2^4.3^2.7^2} J_2^2 J_5 - \frac{5\cdot 31}{2^4.3^3.7} J_2 J_3 J_4 - \frac{5.11}{2^6.3^2} J_3^3 + \frac{61319}{2^7.3^4.7^3} J_2^3 J_3) \\
&+ (\nu_1 J_6 + \nu_2 J_2 J_4 + \nu_3 J_3^2 + \nu_4 J_2^3) \times \\
\times (J_8 &+ \frac{1}{2^2} J_3 J_5 + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} J_4^2 + \frac{199}{2^2.3^2.5\cdot 7^2} J_2^2 J_4 - \frac{11}{3^4} J_2 J_3^2 - \frac{2^2.11.17}{3^3.5\cdot 7^4} J_2^4) \\
+(\rho_1 J_7 + \rho_2 J_2 J_5 + \rho_3 J_3 J_4 + \rho_4 J_2^2 J_3)(J_7 &+ \frac{17}{2^2.3\cdot 7} J_2 J_5 + \frac{13}{2.3^2} J_3 J_4 - \frac{2.5^3}{3^3.7^2} J_2^2 J_3) \\
+ (\sigma_1 J_8 + \sigma_2 J_2 J_6 + \sigma_3 J_3 J_5 &+ \sigma_4 J_4^2 + \sigma_5 J_2^2 J_4 + \sigma_6 J_2 J_3^2 + \sigma_7 J_2^4) \times \\
\times (J_6 - \frac{3^2}{2\cdot 7^2} J_2 J_4 &- \frac{157}{2^3.3^3.7} J_3^2 + \frac{3^2.19}{2^4.5\cdot 7^4} J_2^3) = D_f . R_{jH} , \qquad (9)
\end{aligned}$$

dalla quale si ottengono 39 equazioni fra le 19 incognite λ_1, λ_2, μ_1, ..., uguagliando i coefficienti dei prodotti $B^2 D^2$, $A^4 D^2$,... che trovansi nei due membri, equazioni che indicheremo risp. coi simboli (B^2D^2), (A^4D^2), ...

Di queste 39 equazioni vogliamo scegliere, come più semplici, le seguenti 21, che dividiamo in tre gruppi:

I. $(B^2 D^2)$, $(A^4 D^2)$, $(A^2 BD^2)$, $(A^9 D)$, $(D C^3)$, $(AB^4 D)$, (ABC^2D), $(A^3 C^2 D)$, $(B^3 CD)$;

II. $(A^7 BD)$, $(A^6 CD)$, $(A^5 B^2 D)$, $(A^3 B^3 D)$, (A^4BCD), $(A^2 B^2 CD)$;

III. (A^{14}), $(B C^4)$, $(A^2 C^4)$, $(A^{11} C)$, $(A^{12} B)$, $(B^4 C^2)$.

Al gruppo I, mediante semplici trasformazioni, si può sostituire il seguente, essendo l'equazione $(A^2 BD^2)$ conseguenza delle $(B^2 D^2)$ e $(A^4 D^2)$:

$$5 \mu_1 + 5 \rho_1 + 2^6.3^{12}.7^{10} = 0,$$

$$5\cdot 17\mu_1 - 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\rho_2 - 2^6\cdot 3^{12}\cdot 7^{10}\cdot 17 = 0,$$

$$3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 257\mu_1 - 2^5\cdot 3^2\cdot 103\nu_1 - 2^4\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11^2\nu_3 + 2^5\cdot 5\cdot 17\sigma_1$$
$$+ 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 17\sigma_3 + 2^{13}\cdot 3^{12}\cdot 7^{12} = 0,$$

$$2^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 17\lambda_1 - 3\cdot 5\cdot 7\cdot 4129\mu_1 - 2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 17\nu_1 - 2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\nu_2$$
$$- 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sigma_1 + 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\sigma_3 - 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 7^{11} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&2^3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\lambda_1 - 3\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11^2\lambda_2 - 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 2419\mu_1 + 2^3\cdot 5^2\cdot 13\nu_1\\
&- 3^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11^2\mu_2 + 2^3\cdot 5\cdot 131\sigma_1 - 2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 11\sigma_3 + 2^{14}\cdot 3^{11}\cdot 7^9\cdot 1819 = 0,\\
&- 2^5\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\lambda_1 - 2^6\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\lambda_2 + 5\cdot 7\cdot 4129\mu_1 + 2^7\cdot 197\nu_1\\
&- 2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 7^4\, 11\nu_4 + 2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 29\sigma_1 - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\sigma_3 + 2^{13}\cdot 3^{11}\cdot 7^{11}\cdot 1777 = 0,\\
&- 2^9\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\lambda_1 + 5^2\cdot 7^2\cdot 1451\mu_1 - 2^5\cdot 5^3\cdot 7^2\nu_1 - 2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\rho_3\\
&- 2\cdot 5\cdot 2473\sigma_1 - 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 173\sigma_3 + 2^{11}\cdot 3^{13}\cdot 7^{11}\cdot 1249 = 0,
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}$$

$$2^3\cdot 7^2\cdot 47\lambda_1 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\lambda_2 - 3^3\cdot 7\cdot 697\mu_1 + 2^3\cdot 5\cdot 53\nu_1 - 2^3\cdot 3^3\cdot 7^3\cdot 11\rho_4$$
$$+ 2\cdot 5^2\cdot 31\sigma_1 + 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 19\sigma_3 - 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 7^9\cdot 79699 = 0.$$

Ricavando μ_2, ν_2, ν_3, ν_4, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 in funzione di λ_1, λ_2, μ_1, ν_1, σ_1, σ_3 e sostituendo nel gruppo II si ottengono quattro equazioni indipendenti, cioè:

$$\left.\begin{aligned}
&2^3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 29\lambda_1 - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11^2\lambda_2 - 5\cdot 7\cdot 28243\mu_1 + 2^3\cdot 5^2\cdot 349\nu_1\\
&+ 2\cdot 5\cdot 13^2\cdot 29\sigma_1 + 2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\sigma_3 + 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 7^9\cdot 4007 = 0,\\
&2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\lambda_1 - 5^3\cdot 7^2\cdot 19\mu_1 + 2^5\cdot 5^2\cdot 67\nu_1 + 2\cdot 5\cdot 7\cdot 563\sigma_1\\
&+ 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 43\sigma_3 - 2^{14}\cdot 3^{11}\cdot 7^9\cdot 13423 = 0,\\
&2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 31\nu_1 + 5\cdot 7\cdot 197\sigma_1 + 2^2\cdot 5\cdot 667\sigma_3 - 2^{14}\cdot 3^{10}\cdot 7^9\cdot 1429 = 0,\\
&3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\mu_1 - 2\cdot 5\cdot\sigma_1 + 2^3\cdot 5\sigma_3 + 2^{14}\cdot 3^{10}\cdot 7^{11} = 0,
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}$$

delle quali sono conseguenze le due altre.

Ricavando i valori di λ_1, λ_2, μ_1, ν_1 in funzione di σ_1, σ_3 e sostituendo nel gruppo III, si ottengono sei equazioni, le quali equivalgono alle seguenti:

$$
\left.\begin{array}{c}
5\sigma_1 - 2^2.5\sigma_3 + 2^{13}.3^{10}.7^8.53 = 0, \\[1ex]
2.3^3.5.103\sigma_2 + 2^2.5.7.11^3\sigma_3 + 3^4.5.7.11^2\sigma_6 - 2^{10}.3^{10}.7^{10}.115949 = 0, \\[1ex]
2^2.5^3.11.29\sigma_3 + 3^4.7^4\sigma_6 + 2.3^5.5.7^4\sigma_7 - 2^{10}.3^{10}.5^2.7^9.25273 = 0, \\[1ex]
-2.3^4.5^2.7^2.103\sigma_5 + 2.5.1936223\sigma_3 + 3^4.5^4.7^2.13\sigma_6 \\[1ex]
-2^{10}.3^{10}.7^8.480312691 = 0, \\[1ex]
-2^3.3.5.14093\sigma_3 + 2.3^3.5^2.7.103\sigma_4 - 2.3^5.5^3.7^2\sigma_6 \\[1ex]
-2^{11}.3^{11}.7^8.11.509627 = 0,
\end{array}\right\} \text{III}
$$

che identicamente sodisfano alla sesta.

Diciotto delle incognite si esprimono pertanto in funzione della rimanente σ^3 nel seguente modo:

$$\lambda_1 = \frac{2^{18}.3^{10}.7^7}{5},\ \lambda_2 = 2^{13}.3^9.5.7^6.17,\ \mu_1 = -\frac{2^{16}.3^{11}.7^7}{5},\ \mu_2 = -2^{13}.3^9.5.7^7,$$

$$\nu_1 = -2^2\sigma_3 + \frac{2^{12}.3^{10}.7^9.13}{5}, \quad \nu_2 = \frac{2.3^2}{7^2}\sigma_3 + 2^{11}.3^9.5.7^6.23,$$

$$\nu_3 = \frac{157}{2.3^3.7}\sigma_3 - \frac{2^9.3^7.7^7.13747}{5},$$

$$\nu_4 = -\frac{3^2.19}{2^2.5.7^4}\sigma_3 + \frac{2^8.3^8.7^4.11.125179}{5^2}, \quad \rho_1 = -2^6.3^{11}.7^7,$$

$$\rho_2 = -\frac{2^4.3^{10}.7^6.17.2053}{5},$$

$$\rho_3 = -\frac{2^5.3^9.7^7.4289}{5},\ \rho_4 = -2^7.3^9.5^2.7^5.109,$$

$$\sigma_1 = 2^2\sigma_3 - \frac{2^{13}.3^{10}.7^8.53}{5}$$

irriducibile A d'un certo grado α divisore di m, i cui coefficienti dipendano unicamente da z, per quelle d'un'altra equazione irriducibile B di grado $\frac{m}{\alpha}$, i cui coefficienti dipendano unicamente da w (*);

b) che le radici di quest'ultima equazione sieno le derivate di funzioni algebriche di w (**).

Che queste condizioni sieno necessarie, risulta dalla dimostrazione esposta a suo luogo; è facile persuadersi che esse sono sufficienti, rifacendo a ritroso il cammino ivi seguito. Infatti, detta $\psi(z)$ una radice dell'equazione A, $E'(w)$ una radice dell'equazione B, e indicando con F la funzione inversa di E, l'equazione differenziale proposta è soddisfatta da: $w = F\left(\int^{z}\psi(z)dz\right)$.

2. Proponiamoci ora qualche altra questione relativamente alla forma che può avere un integrale d'una equazione algebrico-differenziale del primo ordine.

Diremo per brevità che più trascendenti $v_1, v_2, \ldots v_n$ sono *algebricamente indipendenti* tra loro, quando fra essi non ha luogo alcuna relazione della forma:

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0 \qquad \text{o} \qquad F(v_1, v_2, \ldots, v_n, z) = 0,$$

dove F è simbolo di funzione razionale intera.

Vediamo anzitutto se l'equazione (1), che considereremo sotto la forma più comoda:

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z) \tag{2}$$

possa avere un integrale:

$$w = F(v_1, v_2), \tag{3}$$

(*) Noterò di passaggio, che *a*) è la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) abbia un integrale della forma $w = P[I(z)]$ dove I è un integrale abeliano, P una funzione periodica (cioè la funzione inversa d'un integrale abeliano).

(**) Un'equazione di tal natura $f(z, x) = 0$ può sempre imaginarsi generata dall'eliminazione di y fra le equazioni algebriche:

$$\varphi(y, x) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} z + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

SULLE EQUAZIONI ALGEBRICO-DIFFERENZIALI

DEL PRIMO ORDINE;

Nota di **Giulio Vivanti**, in Mantova.

Adunanza del 24 novembre 1889.

1. Scopo della presente Nota è di completare il teorema XXI della mia Memoria: *Sulle funzioni definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine* (*) e di esporne altri analoghi.

Al teorema citato sostituisco il seguente:

Affinchè un'equazione algebrico-differenziale del 1° *ordine irriducibile*:

$$f_0(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(w, z) = 0 \quad (1)$$

ammetta un integrale della forma:

$$w = F(I(z)),$$

dove F denota una funzione algebrica, I un integrale abeliano trascendente, è necessario e sufficiente:

a) *che le sue radici sieno i quozienti delle radici d'una equazione*

(*) *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. XVI.

$$\frac{\frac{\partial^2 E}{\partial v_1^2}}{\frac{\partial^2 E}{\partial v_1 \partial w}} = \chi(w),$$

sarà:

$$f(w, z) = -\psi_1(z)\chi(w),$$

e sostituendo nella (4):

$$\psi_2(z) - \frac{\partial E}{\partial v_1}\psi_1(z) = -\frac{\partial E}{\partial w}\psi_1(z)\chi(w),$$

ossia:

$$\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} = \frac{\partial E}{\partial v_1} - \frac{\partial E}{\partial w}\chi(w).$$

Ora il primo membro contiene la sola variabile z, mentre il secondo membro è indipendente da z; indicando quindi con c una costante, sarà:

$$\frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} = c,$$

e per conseguenza:

$$v_2 = c v_1,$$

sicchè v_1, v_2 non saranno tra loro algebricamente indipendenti, contro il supposto. Dunque:

Un'equazione algebrico-differenziale del 1° *ordine non può avere alcun integrale della forma* $F(v_1, v_2)$, *dove* F *è una funzione algebrica e* v_1, v_2 *sono due integrali fra loro algebricamente indipendenti.*

3. Consideriamo un caso più generale. Abbiasi:

$$w = F(v, u),$$

dove F è una funzione algebrica, $v = \int \psi(z)dz$ un integrale abeliano, u un'altra funzione trascendente indipendente da v. Da questa relazione si ricavi:

$$u = E(v, w).$$

Derivando si avrà:

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial E}{\partial v}\frac{dv}{dz}+\frac{\partial E}{\partial w}\frac{dw}{dz}=\frac{\partial E}{\partial v}\psi(z)+\frac{\partial E}{\partial w}\frac{dw}{dz},$$

sicchè dovrà essere identicamente:

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial E}{\partial v}\psi(z)+\frac{\partial E}{\partial w}f(w,\, z).$$

Segue di qui anzitutto, che $\frac{du}{dz}$ dovrà potersi esprimere algebricamente mediante v e z. Posto:

$$\frac{du}{dz}=G(v,\, z),$$

dove G è simbolo di funzione algebrica, dovrà sussistere l'identità:

$$\frac{\partial E}{\partial v}\psi(z)+\frac{\partial E}{\partial w}f(w,\, z)=G(v,\, z).$$

Per trovare la forma della funzione $E(v\,,\, w)$, basterà integrare quest'equazione lineare del primo ordine considerando z come una costante. Applicando il metodo ordinario d'integrazione, e ponendo:

$$\frac{1}{\psi(z)}\int G(v,\, z)dv=H(v,\, z) \tag{5}$$

$$\psi(z)\int\frac{dw}{f(w,\, z)}=\varphi(w,\, z), \tag{6}$$

dove le integrazioni si intendono eseguite considerando z come costante, si trova:

$$E(v,\, w)=H(v,\, z)+\Phi[v-\varphi(w,\, z)],$$

Φ denotando una funzione arbitraria, i cui coefficienti dipendono da z. Scriveremo quindi per maggior chiarezza:

$$E(v, w) = H(v, z) + \Phi[v - \varphi(w, z), z];$$

e cercheremo di determinare Φ in modo che il secondo membro riesca indipendente da z. Perciò dev'essere identicamente:

$$\frac{\partial(H + \Phi)}{\partial z} = 0,$$

quindi:

$$\frac{\partial^2(H + \Phi)}{\partial z \partial w} = 0.$$

Ora:

$$\frac{\partial^2(H + \Phi)}{\partial z \partial w} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial w} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right);$$

e poichè, ponendo:

$$v - \varphi(w, z) = x, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \Phi_1(x, z),$$

si ha:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial w} \Phi_1,$$

sarà:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \Phi_1\right) = 0,$$

ossia:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial z}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z}}{\Phi_1} = \frac{\partial \log \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \log \Phi_1}{\partial z}. \tag{7}$$

Ma il 1° membro di questa identità non contiene v, dunque lo stesso avrà luogo pel 2° membro; e poichè in questo v figura soltanto nella combinazione che abbiamo designato con x, il secondo membro dovrà essere indipendente da x. Ciò può accadere in due modi.

a) Se $\frac{\partial \log \Phi_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial \log \Phi_1}{\partial z}$ sono indipendenti da x. Si trova allora:

$$\Phi_1(x, z) = \lambda(z) e^x,$$

e integrando:

$$\Phi(x, z) = \lambda(z) e^x + \mu(z) = \lambda(z) e^{v - \varphi(w, z)} + \mu(z),$$

quindi:

$$E(v, w) = H(v, z) + \lambda(z) e^{v - \varphi(w, z)} + \mu(z).$$

Il 2° membro deve contenere v *algebricamente*, quindi in $H(v, z)$ deve esservi un termine eguale e contrario a $\lambda(z) e^{v - \varphi(w, z)}$; ma per ciò è necessario che $\varphi(w, z)$ non contenga w, ciò che è assurdo in virtù della (6).

b) Se $\frac{\partial \log \Phi_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial \log \Phi_1}{\partial z}$ non sono indipendenti da x, affinchè il secondo membro della (7) sia indipendente da x sarà necessario che $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ non contenga w. Si avrà dunque:

$$\varphi(w, z) = \lambda(z) + \mu(w),$$

quindi dalla (7):

$$\frac{\partial \log \Phi_1}{\partial x} \lambda'(z) - \frac{\partial \log \Phi_1}{\partial z} = 0,$$

e integrando:

$$\Phi_1(x, z) = \Psi[x + \lambda(z)],$$

$$\Phi(x, z) = M[x + \lambda(z)] + N(z) = M[v - \mu(w)] + N(z),$$

quindi:

$$E(v, w) = H(v, z) + M[v - \mu(w)] + N(z),$$

sicchè $H(v, z)$ dovrà aver la forma $P(v) - N(z)$, e sarà:

$$u = E(v, w) = P(v) + M[v - \mu(w)].$$

Dalla (5) si avrà poi:

$$\frac{du}{dz} = G(v, z) = P'(v)\,\psi(z) = P'(v)\frac{dv}{dz},$$

da cui:

$$u = P(v),$$

e per conseguenza:

$$M[v - \mu(w)] = 0,$$

il che è impossibile, perchè allora la funzione $E(v, w)$ non conterrebbe w. Dunque:

Un'equazione algebrico-differenziale del 1° ordine non può avere alcun integrale della forma $F(v, u)$, dove F è una funzione algebrica, v un integrale abeliano, u una funzione trascendente algebricamente indipendente da v.

4. Sieno $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n trascendenti fra loro algebricamente indipendenti, e l'equazione (2) abbia un integrale della forma:

$$w = F(v_1, v_2, \ldots, v_n, z), \tag{8}$$

dove F è funzione algebrica. Dovrà essere allora identicamente:

$$f[F(v_1,v_2,\ldots,v_n,z),z] = \frac{\partial F}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dz} + \frac{\partial F}{dv_2}\frac{dv_2}{dz} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dz} + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Affinchè questa identità possa aver luogo, è necessario che le $\frac{dv_1}{dz}, \frac{dv_2}{dz}, \ldots, \frac{dv_n}{dz}$ sieno esprimibili algebricamente mediante $v_1, v_2, \ldots, v_n, z$, cioè che sussistano relazioni della forma:

$$\frac{dv_1}{dz} = \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, z), \ldots, \frac{dv_n}{dz} = \varphi_n(v_1, \ldots, v_n, z), \tag{9}$$

dove $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ denotano funzioni algebriche. Si ha dunque il teorema:

Se un'equazione algebrico-differenziale del 1° ordine ha un integrale

della forma $F(v_1, v_2, \ldots, v_n, z)$, *dove* F *è funzione algebrica e* $v_1, v_2, \ldots v_n$ *sono trascendenti fra loro algebricamente indipendenti, queste trascendenti devono costituire una soluzione d'un sistema di* n *equazioni algebrico-differenziali del primo ordine.*

5. Resterebbe ora da risolvere il seguente problema: Date le equazioni (9), determinare la forma che deve avere l'equazione (2) perchè essa abbia un integrale della natura delle (8), e la forma che deve avere la (8) stessa. Mi limiterò per ora ad un caso speciale, quello in cui $n = 2$, le equazioni (9) hanno la forma:

$$\frac{dv}{dz} = A_1(v_1 + B_1), \qquad \frac{dv_2}{dz} = A_2(v_2 + B_2) \tag{10}$$

(dove A_1, B_1, A_2, B_2 sono funzioni algebriche di z), e il 2° membro della (8) non deve contenere z, sicchè dev'essere:

$$w = F(v_1, v_2). \tag{11}$$

Ponendo per brevità:

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = F_i, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_k} = F_{ik},$$

si ha dalle (2), (10), (11):

$$f[F(v_1, v_2), z] = F_1 A_1(v_1 + B_1) + F_2 A_2(v_2 + B_2),$$

equazione che deve essere soddisfatta *identicamente* rispetto alle diverse variabili. Derivando prima rispetto a v_1, poi rispetto a v_2, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial F} F_1 = F_1 A_1 + A_1(v_1 + B_1) F_{11} + A_2(v_2 + B_2) F_{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial F} F_2 = F_2 A_2 + A_1(v_1 + B_1) F_{12} + A_2(v_2 + B_2) F_{22},$$

da cui eliminando $\frac{\partial f}{\partial F}$:

$$A_1(v_1+B_1)F_2F_{11}+\{A_2(v_2+B_2)F_2-A_1(v_1+B_1)F_1\}F_{12}-A_2(v_2+B_2)F_1F_{22}$$

$$=(A_2-A_1)F_1F_2.$$

Poniamo:

$$v_1+B_1=x, \qquad v_2+B_2=y, \qquad A_2=A_1c;$$

sarà:

$$p=\frac{\partial F}{\partial x}=F_1,\ q=\frac{\partial F}{\partial y}=F_2,\ r=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2}=F_{11},\ s=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F_{12},$$

$$t=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F_{22},$$

e l'equazione trovata diverrà:

$$xqr+(cyq-xp)s-cypt=(c-1)pq.$$

Applicando ad essa il metodo d'integrazione di Monge, si ottiene la soluzione generale:

$$F=\Phi\left(x\Psi\left(\frac{x^c}{y}\right)\right),$$

dove Φ, Ψ sono funzioni arbitrarie, i cui coefficienti dipendono dalla variabile z, che si è considerata come costante durante l'integrazione. Per maggior chiarezza scriveremo:

$$F=\Phi\left(y\Psi\left(\frac{x^c}{y},\ z\right),\ z\right).$$

Le Φ, ψ devono determinarsi in modo che il secondo membro di questa equazione non contenga esplicitamente z.

Poniamo per brevità $\frac{x^c}{y}=\xi$, $y\Psi(\xi,\ z)=\theta$; avremo:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dv_1}{dz}+B'_1=A_1(v_1+B_1)+B'_1=A_1x+B'_1,\ \frac{dy}{dz}=A_2y+B'_2,$$

$$\frac{d\xi}{dz}=\xi\left\{\frac{c}{x}\frac{dx}{dz}-\frac{1}{y}\frac{dy}{dz}+c'\log x\right\}=\xi\left\{cA_1+\frac{cB'_1}{x}-A_2-\frac{B'_2}{y}+c'\log x\right\}$$

$$=cB'_1 y^{-\frac{1}{c}}\xi^{\frac{c-1}{c}}-B'_2\frac{\xi}{y}+\xi\frac{c'}{c}(\log y+\log\xi),$$

$$\frac{d\theta}{dz}=y\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dz}\right)+\Psi\frac{dy}{dz}=y\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\xi\frac{c'}{c}(\log y+\log\xi)+A_2\Psi\right\}$$

$$+c\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}B'_1 y^{\frac{c-1}{c}}\xi^{\frac{c-1}{c}}+B'_2\left(\Psi-\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right).$$

Siccome dev'essere per la (2) identicamente rispetto ad x e ad y:

$$f[\Phi(\theta, z), z]=\frac{d\Phi}{dz}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dz}, \tag{12}$$

e siccome f, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ non contengono y, ξ se non nella combinazione che abbiamo denotata con θ $(=y\Psi)$, così lo stesso dovrà aver luogo per $\frac{d\theta}{dz}$. Da ciò si deduce facilmente osservando l'espressione poc'anzi trovata per $\frac{d\theta}{dz}$, che tale espressione dovrà avere la forma:

$$y\Psi[M(\log y+\log\Psi)+N]+Py^{\frac{c-1}{c}}\Psi^{\frac{c-1}{c}}+Q,$$

M, N, P, Q essendo funzioni della sola z. Dal confronto delle due espressioni di $\frac{d\theta}{dz}$ si ha:

$$M\Psi=\frac{c'}{c}\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \tag{13}$$

$$P\Psi^{\frac{c-1}{c}}=cB'_1\xi^{\frac{c-1}{c}}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \tag{14}$$

$$Q=B'_2\left(\Psi-\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right) \tag{15}$$

$$M\Psi\log\Psi+N\Psi=A_2\Psi+\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{c'}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\xi\log\xi. \tag{16}$$

Alle (14), (15) dovrà sostituirsi per $c = 1$ l'unica equazione:

$$Q = B'_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + B'_2 \left(\Psi - \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right). \tag{17}$$

Integrando la (13) si ha, essendo α una funzione di ζ:

$$\Psi = \alpha \xi^{\frac{cM}{c'}}, \tag{18}$$

quindi:

$$F = \Phi\left(y x \xi^{\frac{cM}{c'}}, \zeta \right) = \Phi\left(\alpha \frac{x^{\frac{c^2 M}{c'}}}{y^{\frac{cM}{c'} - 1}}, \zeta \right);$$

ponendo $\frac{c^2 M}{cM - c'} = g$ e modificando alquanto il significato di Φ, si può anche scrivere:

$$F = \Phi\left(\frac{x^g}{y}, \zeta \right).$$

Resta da determinarsi Φ in modo che il secondo membro non contenga esplicitamente ζ. Distingueremo due casi, quello cioè in cui B_1 e B_2 sono costanti, e quello in cui una almeno di queste due funzioni non si riduce ad una costante.

a) Se B_1 e B_2 sono costanti, che senza danno della generalità possiamo supporre nulle, avremo:

$$F = \Phi\left(\frac{v_1^g}{v_2}, \zeta \right),$$

ed è facile vedere, che, affinchè Φ non dipenda esplicitamente da ζ, g deve essere una costante (e precisamente un numero razionale, dovendo F dipendere algebricamente da v_1, v_2) e Φ deve prendere la forma $\Phi\left(\frac{v_1^g}{v_2}\right)$ (*).

(*) Ponendo infatti $\frac{v_1^g}{v_2} = W$, dovremo avere identicamente:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial W} W g' \log v_1;$$

ma poichè le v_1, v_2 non devono figurare se non nella combinazione W, sarà necessariamente $g' = 0$, e per conseguenza anche $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0$.

Dopo ciò si ha dalla (2), ponendo $\frac{v_1^g}{v_2} = W$:

$$f[\Phi(W), z] = \Phi'(W)\left(\frac{g v_1^{g-1}}{v_2} A_1 v_1 - \frac{v_1^g}{v_2} A_2 v_2\right) = \Phi'(W)\, W(gA_1 - A_2),$$

ossia indicando con X la funzione inversa di Φ e ponendo $gA_1 - A_2 = K(z)$:

$$f(w, z) = \frac{1}{X'(w)} X(w) K(z).$$

Reciprocamente, se $f(w, z)$ può porsi sotto questa forma, X e K denotando naturalmente funzioni algebriche, l'equazione (2) avrà l'integrale $w = \Phi\left(\frac{v_1^g}{v_2}\right)$, dove g è un numero razionale, Φ è la funzione inversa di X, e v_1, v_2 soddisfanno alle equazioni lineari:

$$\frac{dv_1}{dz} = A(z) v_1 \qquad \frac{dv_2}{dz} = [gA(z) - K(z)] v_2,$$

$A(z)$ essendo una funzione qualunque di z.

b) Se una almeno delle B_1, B_2, per esempio B_2, non si riduce ad una costante, integrando l'equazione (15) o la (17) si ha:

$$\Psi = \beta \xi + \gamma, \tag{19}$$

essendo β, γ funzioni di z. Dal confronto colla (18) si ricava $\gamma = 0$, quindi:

$$\Psi = \beta \xi, \quad F = \Phi(\beta x^c, z) = \Phi[\beta (v_1 + B_1)^c, z],$$

sicchè in Φ non figurerebbe v_2, il che è contro il supposto. Dunque l'equazione (18) non può sussistere, e la (13) deve assumere una forma illusoria, cioè dev'essere $M = 0$, $c' = 0$, $c = \text{cost}$. Se anche B_1 non è costante, e c è diverso da 1, si ha dalla (14):

$$\Psi = (\delta \xi^{\frac{1}{c}} + \varepsilon)^c,$$

essendo δ, ε funzioni di z; e confrontando colla (19):

$$\gamma = \varepsilon = 0, \qquad \Psi = \beta\xi,$$

equazione impossibile come poc'anzi si è detto. Dunque se B_1 non è costante dev'essere $c = 1$.

Introducendo la (19) nella (16), e ricordando che $M = c' = 0$, si trova:

$$N - A_2 = \frac{\beta'\xi + \gamma'}{\beta\xi + \gamma},$$

donde $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}$, $\beta = k\gamma$ essendo k una costante, e la (19) diviene:

$$\Psi = \gamma(z)(\xi + k),$$

sicchè si ha:

$$w = \Phi[\gamma(z)\{(v_1 + B_1)^c + k(v_2 + B_2)\}, z],$$

ossia modificando alquanto il significato di Φ:

se B_1 non è costante: $\qquad w = \Phi(v_1 + kv_2, z)$,
se B_1 è costante: $\qquad w = \Phi(v_1^c + kv_2, z)$.

Siccome poi Φ non deve contenere esplicitamente z, sarà infine:

$$w = \Phi(v_1^c + kv_2),$$

dove $c = 1$ se B_1 non è costante.

Se poniamo $v_1^c + kv_2 = W$, avremo dalla (2), ricordando che $cA_1 = A_2$:

$$f(w, z) = \Phi'(W)[cv_1^{c-1}A_1(v_1 + B_1) + kA_2(v_2 + B_2)] = \Phi'(W)[A_2W + L],$$

dove $L = kA_2B_2$ nel caso di $B_1 = 0$ (a cui imaginiamo sempre ridotto quello di $B_1 = \text{cost.}$), e $L = A_2(B_1 + kB_2)$ se B_1 non è costante. Indicando ancora con X la funzione inversa di Φ, si ha:

$$f(w, z) = \frac{1}{X'(w)}[A_2X(w) + L].$$

Reciprocamente, se $f(w, z)$ può mettersi sotto la forma:

$$f(w, z) = \frac{1}{X'(w)}[K(z)X(w) + L(z)] \ (^*), \qquad (20)$$

l'equazione (2) ha l'integrale $w = \Phi(v_1^c + k v_2)$, dove Φ è la funzione inversa di X, c è un numero razionale, k una costante qualunque, e v_1, v_2 soddisfanno alle equazioni:

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{c} K(z) v_1 + \Theta(z), \quad \frac{dv_2}{dz} = K(z) v_2 + \frac{1}{k}[L(z) - c\Theta(z)];$$

la funzione arbitraria $\Theta(z)$ che figura in queste equazioni dev'essere identicamente nulla se c è diverso da 1.

Osservando che dalle (2), (20) si ha:

$$\frac{dW}{dz} = WK(z) + L(z),$$

si possono enunciare i risultati ottenuti come segue:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione algebrico-differenziale lineare del primo ordine $\frac{dw}{dz} = f(w, z)$ *abbia un integrale della forma* $F(v_1, v_2)$, *dove* F *è simbolo di funzione algebrica,* v_1, v_2 *sono integrali di funzioni algebrico-differenziali lineari del primo ordine, è che esista una trasformazione algebrica* $w = \Phi(W)$ *della variabile indipendente, la quale trasformi l'equazione data in un'equazione algebrico-differenziale lineare:*

$$\frac{dW}{dz} = WK(z) + L(z).$$

Se $L(z) = 0$, *l'equazione data ha infiniti integrali della forma* $w = \Phi\left(\frac{v_1^c}{v_2}\right)$, *dove* c *è un numero razionale, e* v_1, v_2 *soddisfanno alle equazioni:*

$$\frac{dv_1}{dz} = K(z)v_1, \quad \frac{dv_2}{dz} = [c\Theta(z) - K(z)]v_2,$$

$\Theta(z)$ *denotando una funzione algebrica arbitraria. Se* $L(z)$ *non è identicamente zero, l'equazione data ha infiniti integrali della forma* $w = \Phi(v_1^c + kv_2)$, *dove* c *è un numero razionale,* k *una costante qualunque, e* v_1, v_2 *soddisfanno alle equazioni:*

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{1}{c} K(z) v_1 + \Theta(z), \qquad \frac{dv_2}{dz} = K(z) v_2 + \frac{1}{k} [L(z) - c\Theta(z)],$$

$\Theta(z)$ *denotando una funzione algebrica arbitraria, che è identicamente nulla se* c *è diverso da* 1.

Mantova, 17 novembre 1889.

G. Vivanti.

(*) Affinchè ciò sia possibile, deve poter trovarsi una funzione algebrica $K(z)$ di z, tale che $e^{K(z)\int \frac{dw}{f(w,\, z)}}$, dove l'integrazione s'intende fatta considerando z come costante, prenda la forma $K(z)X(w) + L(z)$, essendo X, L funzioni algebriche.

CONDIZIONI PERCHÈ UNA FORMA DELL'OTTAVO ORDINE ABBIA QUATTRO PUNTI DOPPII.

Nota di **Rosario Alagna**, in Palermo.

Adunanza del 22 dicembre 1889.

Nella presente Nota mi propongo di trovare le relazioni fra gl'invarianti di una forma dell'ottavo ordine con quattro elementi doppii. — Questa ricerca si collega con lo studio dell'involuzione del 5° ordine.

Siccome una forma qualunque dell'8° ordine ha 9 invarianti che debbono sodisfare a 3 relazioni, così il numero delle relazioni da trovare sarà di 7. Seguiremo pertanto il metodo seguente. Considereremo la forma dell'8° ordine come il quadrato d'una forma biquadratica, ne esprimeremo gl'invarianti in funzione degl'invarianti di quest'ultima e infine mediante semplici eliminazioni troveremo le relazioni richieste.

Sia

$$f = \varphi^2 \tag{1}$$

ove

$$f = a_x^8 = b_x^8 = \ldots; \quad \varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^4 = \ldots;$$

essendo a, b, ...; α, β ... simboli equivalenti.

Ponendo

$$k = (ab)^6 a_x^2 b_x^2; \quad h = (kk')^2 k_x^2 k_x'^2; \quad g = (ab)^4 a_x^4 b_x^4,$$

$$m = (ak)^4 a_x^4; \quad n = (ah)^4 a_x^4; \quad p = (gk)^4 g_x^4; \quad q = (gh)^4 g_x^4,$$

i nove invarianti di f sono, come si sa, espressi da

$$J_2=(ab)^8;\quad J_3=(ag)^8;\quad J_4=(kk')^4;\quad J_5=(mk)^4;\quad J_6=(pk)^4;$$

$$J_7=(mb)^4;\quad J_8=(pb)^4;\quad J_9=(nb)^4;\quad J_{10}=(qb)^4.$$

Seguendo le notazioni del Clebsch, indicheremo inoltre con H, i, j l'Hessiano e i due invarianti di φ.

Dalla (1) per successive polarizzazioni si ottengono le formule

$$a_x^6 a_y^2 = \alpha_y^2 \alpha_x^2 . \varphi - \frac{2}{7} H (xy)^2 \tag{2}$$

$$a_x^4 a_y^4 = \alpha_y^4 . \varphi - \frac{2^2 . 3}{7} H_x^2 H_y^2 (xy)^2 - \frac{1}{5} i (xy)^4 . \tag{3}$$

Per la teoria delle forme biquadratiche la (2) ci dà

$$(aH)^2 a_x^6 H_x^2 = \frac{1}{6} i \varphi^2 - \frac{2}{7} H^2 \tag{4}$$

e parimenti la (3) ci fornisce le altre due relazioni

$$(a\alpha)^4 a_x^4 = \frac{2.3^2}{5 \cdot 7} i \varphi \tag{5}$$

$$(aH)^4 a_x^4 = \frac{3}{5 \cdot 7} (5 j \varphi + i H). \tag{6}$$

Calcolo dei covarianti k, h. g, m, n. — Dalla (2) si ha:

$$k = (a\alpha)^2 (a\beta)^4 a_x^2 \alpha_x^2 - \frac{2}{7} (aH)^4 a_x^4 . \tag{7}$$

Per la (5) intanto

$$(a\beta)^4 (a\alpha)^2 a_x^2 \alpha_x^2 = \frac{2.3^2}{5 \cdot 7} i H , \tag{8}$$

cosicchè, sostituendo nella (7) i valori dati dalle (6) e (8), si ottiene

$$k = \frac{2.3}{7^2} (4 i H - j \varphi) , \tag{I}$$

dalla quale si deduce immediatamente

$$h = \frac{2^2 \cdot 3}{7^4}\{(3j^2 - 8i^3)H + 12\, i^2 j \varphi\}. \tag{II}$$

La (3) ci dà

$$(ab)^4 a_x^4 b_x^4 = (a\alpha)^4 a_x^4 . \varphi - \frac{2^2 \cdot 3}{7}(aH)^2 a_x^6 H_x^2 - \frac{1}{5} i \varphi^2,$$

cioè per le (4) e (5)

$$g = \frac{1}{5 \cdot 7^2}\{7 i \varphi^2 + 2^3 . 3 . 5\, H^2\}. \tag{III}$$

Facendo la 4ª sovrapposizione della f sulla k, si ha dalla (I), facendo uso delle (5) e (6),

$$m = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5 \cdot 7^3}[7 ij\varphi + 2 i^2 H]. \tag{IV}$$

Similmente dalla (II) in forza delle stesse relazioni si ricava

$$n = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5 \cdot 7^5}[(15 j^2 + 32 i^3) j \varphi + (3 j^2 - 8 i^3) i H]. \tag{V}$$

Calcolo di p e q. — Dalle (I) e (III) si deduce

$$p = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7^4}[2^2 . 7 i^2 (aH)^4 a_x^4 - 7 ij (a\alpha)^4 a_x^4 + 2^5 . 3 . 5 i (H^2, H)^4 - 2^3 . 3 . 5 j (H^2, \varphi)^4]. \tag{9}$$

Per trovare i valori di $(H^2, H)^4$ e $(H^2, \varphi)^4$, poniamo

$$U_x^8 = H_x^4 . H_x'^4.$$

Per lo sviluppo del Gordan si ha

$$H_x^4 H_y'^4 = U_x^4 U_y^4 + \frac{12}{7}[(HH')^2 H_x^2 H_x'^2]_{y^2} (xy)^2 + \frac{1}{5}(HH')^4 (xy)^4$$

donde si ricava

$$U_x^4 U_y^4 = H_x^4 H_y'^4 - \frac{4}{7} j \alpha_x^2 \alpha_y^2 (xy)^2 + \frac{2}{7} i H_x^2 H_y^2 (xy)^2 - \frac{1}{30} i^2 (xy)^4. \tag{10}$$

La (10) ci dà immediatamente

$$(H^2, H)^4 = \frac{3}{5.7} i^2 H \qquad (11)$$

$$(H^2, \varphi)^4 = \frac{1}{2.5.7} [30 j H + i^2 \varphi]. \qquad (12)$$

Sostituendo nella (9) i valori dati dalle (5), (6), (11), (12) si ha

$$p = \frac{2^2.3^2}{5^2.7^5} [3.13\, i^2 j \varphi + 2.127\, i^3 H - 2^2.3.5^2 j^2 H]. \qquad (\mathrm{VI})$$

Facendo infine la 4ª sovrapposizione di g sopra h, si ottiene per le stesse relazioni (5), (6), (11), (12)

$$q = \frac{2^2.3^2}{5^2.7^7} [-2^3.127 i^5 H + 2^4.29 i^4 j \varphi + 3.7.19^2 i^2 j^2 H + 3.5.7 i j^3 \varphi]. \; (\mathrm{VII})$$

Calcolo degl'invarianti di f. — Dalla (5) si ricava

$$J_2 = \frac{2.3^2}{5.7} i^2. \qquad (\mathrm{VIII})$$

Dalla (III) si ha, riflettendo che $\varphi^2 = f$ e facendo uso delle (5) e (6)

$$J_3 = \frac{1}{3.5.7^3} [7.31\, J_2 i + 2^3.3^3.5.j^2]. \qquad (\mathrm{IX})$$

La (I) ci dà

$$J_4 = \frac{1}{2^2.3.7^2} [113\, J_2^2 - 2.3.7^2 J_3 i]. \qquad (\mathrm{X})$$

Facendo la 4ª sovrapposizione della (I) sopra la (IV) si ha

$$J_5 = \frac{1}{2.3.5.7^2} [5.7.19\, J_2 J_3 - 3^2 J_2^2.i]. \qquad (\mathrm{XI})$$

Similmente dalle (I) e (VI) si ricava

$$J_6 = \frac{1}{2.5.7^4} [2^7.3.J_2^3 - 7_2.19\, J_2 J_3 i + 5.7^3 J_3^2]. \qquad (\mathrm{XII})$$

Le (II) e (IV) ci dànno

$$J_7 = \frac{1}{2^3.3^2.5^2.7^3}[-3^2.419\,J_2^3 i + 2.5.7.811\,J_2^2 J_3 + 2.3^2.5.7^3\,J_3^2 i]. \quad \text{(XIII)}$$

Facendo la 4ª sovrapposizione della (II) sopra la (VI) si ottiene

$$J_8 = \frac{1}{2^4.3^2.5^2.7^5}[-3^2.17.1847\,J_2^4 + 2^2.3.7^2.3557\,J_2^2 J_3 i - 2.5.7^4.173\,J_2 J_3^2]. \quad \text{(XIV)}$$

Parimenti dalle (II) e (V) si ha

$$J_9 = \frac{1}{2^6.3^3.5^2.7^4}[3^2.3599\,J_2^4 i - 5.7.3233\,J_2^3 J_3 + 2.3^3.5.7^3.19\,J_2 J_3^2 i + 2.3^2.5^2.7^4\,J_3^3]. \quad \text{(XV)}$$

Le (II) e (VII) ci forniscono infine

$$J_{10} = \frac{1}{2^7.3^3.5^2.7^6}[3^2.1248439\,J_2^5 - 2.3.7^2.432811\,J_2^3 J_3 i + 2.5.7^3.214393\,J_2^2 J_3^2 + 2^2.3^2.5.7^5\,J_3^3 i]. \quad \text{(XVI)}$$

Eliminando ora la i e la j fra le (VIII), (IX), . . . , (XVI) si ottengono le relazioni

$$113^2 J_2^4 - 2^3.3.7^2.113\,J_2^2 J_4 - 2.5.7^5\,J_2 J_3^2 + 2^4.3^2.7^4.\,J_4^2 = 0 \quad (A)$$

$$3.113\,J_2^4 - 2^2.3^2.7^2.\,J_2^2 J_4 - 2.5.7^3.19\,J_2 J_3^2 + 2^2.3.5.7^4\,J_3 J_5 = 0 \quad (B)$$

$$157\,J_2^3 + 2^2.3.7^2.19\,J_2 J_4 + 2.3.5.7^3\,J_3^2 - 2^2.3.5.7^4.\,J_6 = 0 \quad (C)$$

$$2^3.5^3.\,J_2^2 J_3 - 7.419\,J_2 J_5 + 2.3.7^2\,J_3 J_4 + 2^2.3.5.7^2\,J_7 = 0 \quad (D)$$

$$521291\,J_2^4 - 2^3.3.7^2.3557\,J_2^2 J_4 - 2.5.7^4.173\,J_2 J_3^2 - 2^4.3^2.5^2.7^5.\,J_8 = 0 \quad (E)$$

$$28\;157\,J_2^3 J_3 - 2.7.3599\,J_2^2 J_5 - 2^2.3^2.7^2.19\,J_2 J_3 J_4 + 2.3.5.7^3.\,J_3^3 - 2^6.3^2.5.7^3\,J_9 = 0 \quad (F)$$

$$3^3.1248439\,J_2^5 - 2.5.7^3.7579213\,J_2^2 J_3^2 + 2^2.3.5.7^4.432811\,J_2 J_3 J_5 - 2^3.3^3.5.7^5\,J_3^2 J_4 - 2^7.3^4.5^2.7^6\,J_{10} = 0. \quad (G)$$

Le relazioni (A), (B), . . . (G) sono quelle richieste.

Palermo, 6 dicembre 1889.

ROSARIO ALAGNA.

SUL GENERE DELLE CURVE Ω NELLE INVOLUZIONI PIANE DI CLASSE QUALUNQUE;

Nota del prof. V. **Martinetti**, in Messina.

Adunanza del 5 gennajo 1890.

1. In una involuzione piana *d'ordine n* e *classe* ν ($\nu > 0$) il luogo delle coppie di punti corrispondenti allineate con un punto fisso O si suole chiamare *la curva Ω del punto O*, ed è la curva *isologica* di quel punto.

Le Ω dei varii punti del piano formano una rete $[\Omega]$ di curve d'ordine $2\nu + 1$, due qualunque delle quali si segano in 2ν punti (variabili) esternamente ai punti base della rete.

Indichiamo con $1, 2, \ldots, h$ i punti fondamentali della trasformazione involutoria e siano questi *distinti* e multipli rispettivamente secondo

$$r_1, r_2, \ldots, r_h$$

per le curve della rete omaloidica corrispondente alle rette del piano, e secondo

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$$

per la curva Γ punteggiata unita della trasformazione.

Allora essi sono multipli secondo

$$\theta_1 = r_1 - \lambda_1, \ \theta_2 = r_2 - \lambda_2, \ \ldots, \ \theta_h = r_h - \lambda_h$$

per le curve Ω, le quali hanno inoltre u punti base semplici negli u punti $h+1,\ h+2,\ \ldots,\ h+u$ uniti isolati della trasformazione, e

$$2\Delta = \sum_{i=1}^{h}(\alpha_{ii} - \lambda_i)$$

tangenti fisse nei punti fondamentali, o, come si suol dire, hanno altri 2Δ punti base semplici

$$h+u+1,\ h+u+2,\ \ldots,\ h+u+2\Delta$$

(divisi in Δ coppie di punti corrispondenti) infinitamente vicini a punti fondamentali in date direzioni.

Poniamo $\theta_i = 1$ per $i = (h+1),\ (h+2),\ \ldots,\ (h+u+2\Delta)$.

Fra i numeri n, ν, r, λ, θ, oltre alle notorie relazioni (*)

$$\sum_{i=1}^{h} r_i^2 = n^2 - 1\,, \qquad \sum_{i=1}^{h} r_i = 3(n-1)$$

esistono le altre (**):

$$\sum_{i=1}^{h+u+2\Delta} \theta_i^2 = 4\nu^2 + 2\nu + u \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{h} r_i\theta_i = (n-1)(2\nu+1) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{h} r_i\lambda_i = (n-1)(n-2\nu). \tag{3}$$

Delle quali la (1) dice appunto che le Ω si segano in 2ν punti variabili, e le (2) e (3) che alle Ω ed alla Γ corrispondono curve rispettivamente dello stesso ordine.

(*) *Vedi* Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Mem. dell'Acc. di Bologna*, 1863.

(**) *Vedi* Caporali, Sulle trasformazioni univoche piane involutorie. *Rend. della R. Acc. delle scienze di Napoli*, 1879, fasc. 9°, od anche Memorie di geometria, Napoli, 1888, p. 116-125.

Bertini, Ricerche sulle trasformazioni univoche ecc. *Ann. di Mat.*, serie II, tom. 8°.

Bertini, Sopra alcune involuzioni piane. *Rend. Ist. Lombardo*, serie II, vol. 16°.

Se esiste la curva punteggiata unita Γ e si chiama x il numero delle sue intersezioni variabili colle Ω, sarà:

$$x = (n - 2\nu)(2\nu + 1) - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \theta_i. \tag{4}$$

Se non esiste la curva Γ questa relazione è vera quando si ponga $x = 0$.

2. Se è p il *genere* di una Ω arbitraria (la quale non è spezzata (*)) dovrà essere (**)

$$\sum_{i=1}^{h+u+2\Delta} \theta_i(\theta_i - 1) = 2\nu(2\nu - 1) - 2p,$$

e quindi per la (1):

$$\sum_{i=1}^{h+u+2\Delta} \theta_i = 4\nu + 2p + 1. \tag{5}$$

Combinando la (4) colle (1) e (2) si trova poi:

$$x + u + 2\Delta = 2\nu + 2. \tag{6}$$

Si ponga:

$$\frac{1}{2}(2\nu + 1)(2\nu + 4) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h+u+2\Delta} \theta_i(\theta_i + 1) - 2 = c,$$

$$\frac{1}{2}(n - 2\nu)(n - 2\nu + 3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h} \lambda_i(\lambda_i + 1) = d.$$

Se i passaggi pei punti base esprimono per le Ω condizioni tutte indipendenti, c è il numero delle condizioni soddisfatte dalle Ω e non consistenti in passaggi pei punti base della rete $[\Omega]$: Se invece di quelle condizioni γ sono conseguenza delle altre, le Ω soddisferebbero ad altre $c + \gamma$ condizioni lineari di natura diversa.

Analogamente d, quando esista la curva Γ, è la differenza fra il numero delle condizioni indipendenti necessarie a determinare la Γ, ed

---

(*) Bertini, Sopra alcune involuzioni piane, l. c., n° 7.

(**) Bertini, Sui sistemi lineari. *Rend. del R. Istit. Lombardo*, serie II, vol. 15.

il numero delle condizioni, indipendenti o no, imposte alla Γ dai passaggi pei punti fondamentali. Se non esiste la Γ la seconda relazione è soddisfatta da $d = 0$.

Le relazioni sopra scritte, combinate colle precedenti, dànno:

$$p + c = 2\nu - 1\,; \tag{7}$$

$$c + d = n - 2\nu. \tag{8}$$

3. Se nella involuzione non esiste la curva punteggiata unita, per la qual cosa si deve avere $n = 2\nu$, $d = 0$, sarà:

$$c = 0,\ p = 2\nu - 1.$$

Dunque:

In ogni involuzione d'ordine 2ν *e classe* ν *le curve* Ω *sono di genere* $2\nu - 1$.

4. Il numero c non può essere negativo.

Nel caso $n = 2\nu$ si è già visto che è $c = 0$, quindi supponiamo $2\nu < n$. Se fosse $c < 0$ sarebbe per la (8) $d \geqq n - 2\nu + 1$ e quindi:

$$(n - 2\nu)(n - 2\nu + 3) - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i(\lambda_i + 1) \geqq 2(n - 2\nu + 1),$$

però:

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i(\lambda_i + 1) \leqq (n - 2\nu - 1)(n - 2\nu + 2).$$

Dunque si potrebbe condurre sempre almeno una curva dell'ordine $(n - 2\nu - 1)$ (che è necessariamente > 0 perchè tutte le λ_i non possono essere nulle) avente in ogni punto fondamentale la stessa molteplicità della Γ. Ad una tal curva ne dovrebbe corrispondere una d'ordine

$$n(n - 2\nu - 1) - \sum_{i=1}^{h} r_i \lambda_i = -2\nu,$$

la qual cosa è assurda.

Si ha adunque in ogni caso

$$c \geqq 0.$$

Dalla (7) si deduce perciò:

Il genere delle curve Ω *in una involuzione di classe qualunque* (naturalmente maggiore di zero) *è* AL MASSIMO *eguale a* $2\nu - 1$.

Questo limite massimo è raggiunto quando non esista curva punteggiata unita.

Per la (5) abbiamo poi:

Qualunque sia la involuzione deve essere

$$\sum_{i=1}^{k+n+2\Delta} \theta_i \leqq 8\nu - 1.$$

4. Ma possiamo trovare anche un *termine minimo* pel genere p delle Ω.

Supporremo sempre nel seguito che la involuzione sia dotata di curva punteggiata unita, poichè nel caso contrario sappiamo che è $p = 2\nu - 1$.

Tutte le curve Φ d'ordine $2\nu + 1$ passanti pei punti base della rete $[\Omega]$ come vi passano le Ω stesse, ma non soggette ad altre condizioni, formano un sistema lineare $[\Phi]$ a $c + \gamma + 2$ dimensioni, il quale è unito nella involuzione, cioè ogni sua curva ha nel sistema medesimo la sua corrispondente.

Si può allora stabilire in $[\Phi]$ una corrispondenza involutoria (la quale potrebbe essere l'identità) se chiamiamo in esso corrispondenti due curve quando si corrispondano nella data involuzione piana. E poichè ad ogni sistema lineare di curve Φ corrisponde un sistema lineare di curve Φ ad egual numero di dimensioni, così la corrispondenza stabilita è un'*omografia involutoria*, evidentemente non *degenere*.

5. Se tale omografia è l'identità, allora le Φ sono tutte unite, due qualunque di esse si segano esternamente ai punti base in ν coppie di punti corrispondenti, e per $c + \gamma + 1$ coppie arbitrarie di punti corrispondenti passano infinite di queste curve, per la qual cosa si dovrà avere:

$$2(c + \gamma + 1) \leqq 2\nu,$$

e per la (7):

$$p \geqq \nu + \gamma.$$

Le Φ sono certamente unite quando sia $\Delta = 0$, perocchè una Φ dev'essere toccata dalla sua corrispondente nei punti uniti isolati della involuzione e deve essere segata da questa, fuori dei punti base delle Ω, almeno negli x punti che essa ha in comune colla Γ, sicchè ogni Φ ha in comune colla sua corrispondente almeno

$$\sum_{i=1}^{h+u+2\Delta} \theta_i^2 + u + x = (2\nu + 1)^2 + 2 - 2\Delta$$

punti; evidentemente, adunque, per $\Delta = 0$ ogni Φ è unita.

6. Volendo considerare il caso in cui le curve del sistema $[\Phi]$ possono non essere unite dovremo supporre $\Delta > 0$.

Se l'omografia involutoria nello spazio $[\Phi]$ non è l'identità è noto (*) che devono esistere in $[\Phi]$ due sistemi lineari $[\Phi_1]$, $[\Phi_2]$ rispettivamente a

$$c + \gamma + 1 - m, \quad m$$

dimensioni di curve unite, i quali sono gli *spazii fondamentali* della omografia (**).

Una curva Φ non appartenente nè a $[\Phi_1]$ nè a $[\Phi_2]$ non è unita ed individua colla sua corrispondente un fascio unito nel quale le curve corrispondenti formano un'involuzione (non mai parabolica) avente per elementi doppi una curva di $[\Phi_1]$ ed una curva di $[\Phi_2]$; e reciprocamente una curva di uno dei sistemi fondamentali con ciascuna dell'altro individua un fascio unito di curve non tutte unite.

Come risulta dal n° 5, una Φ arbitraria è segata dalla sua corrispondente, oltre che nei punti base di $[\Phi]$ e fuori della curva Γ e dei punti uniti isolati in

$$2(\Delta - 1)$$

(*) *Vedi* Bertini, Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni. *Rend. del R. Istit. Lombardo*, serie II, vol. 19.

(**) *Vedi* Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Mem. della R. Acc. dei Lincei*, serie III, vol. 19, n° 7.

punti i quali si dividono in $\Delta - 1$ coppie di punti corrispondenti. Sicchè una Φ arbitraria, non unita, contiene soltanto $\Delta - 1$ coppie di punti corrispondenti. Allora il minore dei due numeri

$$c + \gamma + 1 - m \,, \quad m \,,$$

che noi supporremo sia m, non deve superare $\Delta - 1$, perchè, se così non fosse, per più di $\Delta - 1$ coppie di punti corrispondenti passerebbero curve di ciascuno dei due sistemi fondamentali, e quindi dei fasci di curve in generale non unite, la qual cosa è impossibile.

Dunque è $m \leq \Delta - 1$, ed m esprime il massimo numero di coppie di punti corrispondenti che si possono scegliere arbitrariamente per farvi passare una Φ non unita.

7. Le Ω appartengono ad uno dei sistemi fondamentali della nostra omografia involutoria, sia questo $[\Phi_1]$ (la dimensione del quale sarà $c + \gamma + 1 - m$, oppure m, ma sempre ≥ 2): Le curve Φ_1 non sono certamente tutte spezzate.

Sia Φ_2 una curva arbitraria del sistema $[\Phi_2]$, questa con ogni Φ_1 individua un fascio di curve, le quali hanno nel fascio stesso le loro corrispondenti, senza essere tutte unite. Ma si è già notato che una curva Φ sega la sua corrispondente in x punti sulla Γ e la tocca nei punti uniti isolati, per la qual cosa la Φ_2 deve essere segata da ogni Φ_1 in un gruppo di x punti posti su Γ ed in due punti coincidenti in ogni punto unito isolato della involuzione.

Adunque Φ_2 deve spezzarsi nella Γ (contata una volta sola) (*) ed in una residua curva, semplice o composta, d'ordine $4\nu + 1 - n$ avente un punto doppio in ogni punto unito isolato della involuzione.

Questa curva residua deve anche contenere tutte le rette unite della involuzione. Infatti una qualunque di queste rette è fondamentale (**)

(*) Veramente si dovrebbe dire « deve spezzarsi nella parte di Γ segata in punti variabili dalle Φ_1 » ma è facile riconoscere che non vi può essere una parte di Γ non segata in punti variabili dalle Φ_1, osservando che questa non dovrebbe neppure essere segata dalle Ω, quindi sarebbe un sistema di rette, per le quali non esisterebbe inviluppo di rette principali, ecc. ecc.

(**) *Vedi* Bertini, Sopra alcune involuzioni piane, l. c., n° 6.

nel fascio di due Φ corrispondenti arbitrarie, quindi vi è nel fascio una curva che la contiene, alla quale non ne può corrispondere una diversa (chè altrimenti la retta sarebbe parte fissa delle curve del fascio) dunque quella curva è unita, ed è necessariamente quella che appartiene a $[\Phi_2]$ perocchè le Φ_1 non sono in generale spezzate.

Le Φ_2 non conterranno *in generale* una curva fondamentale, perchè una Φ arbitraria non segherà in generale la sua curva corrispondente fuori dei punti base delle Ω, sopra una curva fondamentale. Per questo e perchè

$$\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 2\lambda_i) = (n-1)(4\nu + 1 - n)$$

si deve concludere che le parti delle Φ_2 che risultano togliendo la curva Γ hanno (in generale) nei punti fondamentali della trasformazione le molteplicità $r_i - 2\lambda_i$, e devono passare quindi pei punti fondamentali, colle stesse direzioni fisse delle Ω.

Se poi da queste curve togliamo le rette unite otteniamo un sistema lineare (nel quale vi potrà essere per avventura ancora una parte fissa) di egual numero di dimensioni di $[\Phi_2]$, le curve del quale hanno nei punti fondamentali le direzioni fisse delle Ω (poichè le rette unite non possono uscire dai punti fondamentali con quelle direzioni) e si segano due a due al massimo in 2ν punti variabili.

8. Poichè uno dei sistemi fondamentali contiene la rete $[\Omega]$ il numero $c + \gamma + 1 - m$ (che è $\geq m$) sarà almeno uguale a 2.

Si ha adunque un fascio di curve unite se noi obblighiamo le curve del sistema fondamentale $\infty^{c+\gamma+1-m}$ a passare per $c + \gamma - m$ punti arbitrarii: Tutte le curve di questo fascio passeranno anche pei punti corrispondenti a quelli scelti, talchè nella base di esso avremo almeno $2(c+\gamma-m)$ punti distinti dai punti base delle Φ. Ma si è visto che di tali punti ve ne sono al massimo 2ν, dunque:

$$2(c + \gamma - m) \leq 2\nu.$$

E poichè $m \leq \Delta - 1$, sarà:

$$c + \gamma - \Delta + 1 \leq \nu$$

e per la (7)

$$p \geq \nu + \gamma - \Delta$$

relazione che per $\Delta = 0$ coincide con quella trovata al n° 5.

Dunque: *Le curve Ω di una involuzione di classe ν, aventi Δ coppie di direzioni fisse, sono di genere non minore a $\nu - \Delta$.*

9. Se nella involuzione che si considera esiste un punto fondamentale 1 pel quale sia $\varepsilon_1 = 0$ (*) le 2Δ direzioni fisse delle curve Ω sono tutte in questo punto, poichè la Ω_1 (curva isologica di 1) è allora composta della curva fondamentale corrispondente ad 1 e delle rette unite della involuzione appartenenti al punto 1, e nè queste rette, nè la detta curva fondamentale potrebbero passare per un altro punto fondamentale con direzioni, che fossero comuni a tutte le Ω.

Se in questo caso esistesse il sistema fondamentale $[\Phi_2]$, una curva di questo dovrebbe avere nel punto 1 una molteplicità inferiore di una unità a quella della Ω_1 (vedi n° 7, essendo qui evidente come non possa presentarsi il caso speciale che la curva fondamentale di 1 faccia parte delle Φ_2) e ciò non è possibile, perchè una Φ_2 contenendo le rette unite, la curva Γ ed un'altra curva, avente le stesse direzioni fisse delle Ω, avrebbe appunto in 1 una molteplicità non inferiore a quella della Ω_1.

Dunque in tal caso il sistema $[\Phi]$ è di curve unite, quindi (n° 5):

Quando nella involuzione si ha $\varepsilon_1 = 0$, almeno per un punto fondamentale, le curve Ω sono di genere non inferiore a ν e le loro molteplicità nei punti base soddisfano la condizione:

$$\sum_{i=1}^{h+\pi+2\Delta} \theta_i \geq 6\nu + 1.$$

(*) Adattiamo qui e nel seguito le notazioni introdotte dal sig. Bertini nella Nota: « Sopra alcune involuzioni piane », l. c. — Allora ε_i e δ_i sono definiti dalle relazioni $\alpha_{ii} = r_i - \nu + \delta_i$, $\lambda_i = r_i - \nu - \delta_i + 2\varepsilon_i$ $(0 \leq \delta_i \leq \nu - 1,\ \delta_i \geq \varepsilon_i \geq 0)$.

I punti fondamentali pei quali $\varepsilon_i = 0$ hanno interessanti proprietà (delle quali noi faremo uso) come si può vedere nella mia Memoria: « Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano ». *Ann. di Matem.*, serie II, vol. 13, n° 2, ed in quella di Berzolari: « Ricerche sulle trasformazioni, univoche, piane, involutorie, ecc. », ibid., serie II, tom. 16.

10. Vogliamo ora esaminare più davvicino i casi $\Delta = 1$, $\Delta = 2$.

Se $\Delta = 1$ tutte le Φ sono unite. Infatti, se così non fosse, esisterebbe il sistema $[\Phi_2]$, anzi questo sarebbe formato da una sola curva (n° 6) la quale non potrebbe essere composta soltanto dalla Γ e dalle rette unite, perchè deve passare per un punto fondamentale colle direzioni comuni alle Ω, e nè la Γ nè le rette unite hanno queste direzioni. L'altra parte che compone questa Φ_2 non dovrebbe essere segata in punti variabili dalle Φ (n° 6), e quindi neppure dalle Ω, perciò dovrebbe essere composta da rette unite (*) il che è impossibile.

Si considerino allora tutte le curve Ψ d'ordine $2\nu + 1$ aventi nei punti base delle Ω le medesime molteplicità delle Ω stesse ma non aventi nel punto fondamentale 1 le due tangenti comuni a tutte le Φ (si suppone, naturalmente, che quest'ultimo fatto non sia conseguenza del passaggi per gli altri punti base, nel qual caso però avendosi $\gamma \geq 2$ sarebbe $p > \nu$ (n° 5) che è precisamente la conclusione alla quale vogliamo giungere in ogni caso).

Esse formano un sistema lineare $[\Psi]$, $c + \gamma_1 + 4$ volte infinito (γ_1 ha per $[\Psi]$ lo stesso significato che γ aveva per $[\Phi]$ o per $[\Omega]$) pel quale si può ripetere lo stesso ragionamento fatto per $[\Phi]$ ai n^i 4-7. Si concluderà che:

o tutte le $[\Psi]$ sono unite, ed allora avendosi:

$$2(c + \gamma_1 + 4 - 1) \leq 2\nu + 2$$

si trova:

$$c \leq \nu - \gamma_1 - 2$$

$$p \geq \nu + \gamma_1 + 1;$$

ovvero non tutte le Ψ sono unite e quindi esistono in $[\Psi]$ due sistemi (fondamentali) lineari $[\Psi_1]$, $[\Psi_2]$ di curve unite rispettivamente a

$$c + \gamma_1 + 3 - m, \qquad m \qquad (m \leq 1)$$

dimensioni.

(*) *Vedi* Bertini, « Sopra alcune involuzioni piane » l. c., n° 6.

Del sistema $[\Psi_1]$ fa parte il sistema $[\Phi]$ che è di curve tutte unite, e poichè $[\Psi_1]$ e $[\Psi_2]$ non devono avere alcuna curva in comune, e se esistesse una Ψ_2 avente in 1 le direzioni fisse delle Ω, questa sarebbe una Φ e quindi una curva di $[\Psi_1]$, così il sistema $[\Psi_2]$ deve essere di dimensione minore di 1 ($m = 0$) cioè composto di una sola curva non avente in 1 le direzioni comuni alle Ω.

11. Questa curva Ψ_2 è composta della Γ, delle rette unite della involuzione, e da una curva C, d'ordine K, unita, segata in una coppia di punti corrispondenti variabili da ogni Ψ.

La C è parte della Ω di un solo punto O. Una retta arbitraria per O sega ulteriormente la C in punti che sono comuni a tutte le Ω dei punti di quella retta, tali intersezioni sono dunque al massimo due, anzi sono due, corrispondenti fra loro, se la C non è fondamentale, e se la C è fondamentale (corrispondente necessariamente ad O) ve ne ha una sola corrispondente ad un punto infinitamente vicino ad O comune a tutte quelle Ω.

Da questa osservazione segue che la C può passare al più semplicemente per ogni punto fondamentale, eccetto per quello al quale fosse per caso relativa, e che il punto O è $(K-2)$-uplo almeno per la C.

Inoltre la C non può passare più che semplicemente per i punti uniti isolati della involuzione diversi da O, perchè la Ω di uno di quei punti, non può contenere la C ed ha nel punto corrispondente un punto triplo (*), quindi se C avesse ivi un punto doppio segherebbe quella Ω in più di $K(2\nu+1)$ punti, cosa impossibile.

Per questo, se il punto O è il punto fondamentale j della involuzione dovremo avere evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{h} r_i + (K-3) r_j \geqq K(n-1);$$

$$(K-3) r_j \geqq (K-3)(n-1).$$

Supponendo che la involuzione non sia di quelle di Jonquières

(*) *Vedi* Caporali, l. c., n° 7.

(le quali sono tutte note (*) e quelle per cui $\Delta = 1$ sono di classe 2 e per esse è $p = 3$) dovremo supporre $K = 3$.

Se poi O non è fondamentale deve essere $K = 2$ ovvero $K = 3$ perchè la C deve essere unita e non ha punti multipli nei punti fondamentali.

Qualora sia $K = 3$ la C passa (semplicemente) per tutti i punti fondamentali, ed al più semplicemente per i punti uniti isolati, quindi:

$$\sum_{i=1}^{h+n} \theta_i \geqq 3(2\nu + 1) - 2$$

e per la (5) (n° 2)

$$4\nu + 2p - 1 \geqq 3(2\nu + 1) - 2$$

$$p \geqq \nu + 1.$$

Se $K = 2$, la conica C deve passare per il punto 1, perchè la Ω_1 (che contiene la curva fondamentale corrispondente ad 1, e le rette unite appartenenti ad 1) deve passare per 1 con un ramo di più della Ψ_2 (n° 7, non potendo, per $K = 2$, la C essere fondamentale) e sappiamo che la curva fondamentale corrispondente ad 1 passa per questo punto due volte di più della Γ. Questa osservazione mostra anzi che la Ω_1 è precisamente composta delle rette unite passanti per 1, e della curva fondamentale di questo punto, per la qual cosa dovrà essere:

$$\varepsilon_1 = 0 \ (^{**})$$

ed allora

$$\delta_1 = 1 \qquad \theta_1 = \nu + 1 \ (^{***}).$$

La somma delle θ_i dei punti esistenti sulla C deve essere (la C non essendo spezzata) $2(2\nu + 1) - 2$, quindi sopra C vi sono, oltre ad 1, almeno altri quattro punti base delle Ψ, perchè le θ_i per

---

(*) *Vedi* Bertini, « Sopra alcune involuzioni piane » l. c.

(**) *Vedi* Martinetti, l. c. n° 2.

(***) *Vedi* Bertini, « Sopra alcune involuzioni piane », n° 9.

$i > 1$ sono al massimo eguali a $\nu - 1$ [dovendo essere in ogni caso $\theta_1 + \theta_i \leqq 2\nu$ (*)].

Se alle curve del sistema $[\Psi'_1]$ imponiamo di passare per due punti arbitrarii di C, otteniamo un sistema lineare di curve a $c + \gamma_1 + 1$ dimensioni spezzate nella C ed in una curva variabile, unita, d'ordine $2\nu - 1$, passante pei punti base delle Ψ', che non siano sopra C, come vi passano le Ψ', e per quelli situati sopra C, con un ramo di meno delle Ψ'.

Due qualunque di queste curve si segano fuori dei punti base delle Ψ' in $(2\nu - 1)^2 - \sum_{i=1}^{h+n} \theta_i^2 - \rho + 2\sum' \theta$ punti, la $\sum'$ essendo estesa ai punti base delle Ψ' situati sopra C, e ρ essendo il numero di questi punti.

Avendosi poi $\sum' \theta = 2(2\nu + 1) - 2$, il numero sopra scritto è eguale, per la (1), a $2\nu + 2 - \rho$.

E poichè delle curve in parola noi ne possiamo far passare infinite per $c + \gamma$ coppie arbitrarie di punti corrispondenti, così sarà

$$2(c + \gamma_1) \leqq 2\nu + 2 - \rho \leqq 2\nu + 4,$$

e quindi ancora

$$p \geqq \nu + \gamma_1 + 1.$$

Si conclude:

Se in una involuzione di classe ν, le Ω hanno una sola coppia di direzioni fisse, è necessariamente:

$$p \geqq \nu + 1$$

e quindi anche

$$\sum_{i=1}^{h+n} \theta_i \geqq 6\nu + 1.$$

(Continua).

Messina, 26 dicembre 1889.

V. MARTINETTI.

(*) *Vedi* Berzolari, l. c., n° 1: le rette che non sono segate in punti variabili dalle Ω (che cioè sono unite) contengono un numero dispari di punti base delle Ω.

SISTEMA DI CIRCOLI TANGENTI A TRE CERCHI DATI, IN COORDINATE TRILINEARI;

Nota del prof. F. **Caldarera**, in Palermo.

Adunanza del 5 gennajo 1890.

Dinoto A, B, C i vertici del triangolo fondamentale, a, b, c i lati rispettivamente opposti, emergendo dal discorso stesso se s'intende dei segmenti interposti, ovvero delle rette indefinitamente prolungate, ne dinoto con Δ l'area, con a', b', c' le tre altezze insistenti su a, b, c.

Le coordinate x y z di ogni punto saranno prese, per maggiore semplicità, perpendicolari agl'indicati lati, cioè le x ad a, le y a b, le z a c, e coi segni competenti, convenendo di assumerle tutte positive pei punti rinchiusi nel triangolo fondamentale, e per gli esterni positive se a partire dai lati vanno nello stesso senso che pei punti interni, negative se in verso opposto; alle stesse x, y, z apporremo i medesimi indici od apici, che contrassegnano i punti, ai quali si riferiscono, così ad e. si designeranno $x_3 y_3 z_3$ le coordinate del punto P_3, e via di seguito

Riguardo agli stessi elementi del triangolo fondamentale pongo

$$w_1 = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix},$$

e designo w_2, w_3 le ausiliarie conseguenti da questa mediante le permutazioni cicliche successive negli elementi (abc).

Ciò premesso, osservo che presa l'equazione d'un cerchio nella forma ternaria quadratica

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

con la quale devono di conseguenza coesistere le relazioni
$abc = Ab^2 + Ba^2 - 2Dab = Ac^2 + Ca^2 - 2Eac = Bc^2 + Cb^2 - 2Fbc$,
se lo stesso sia segato in due punti da una retta u data per l'equazione

$$u = lx + my + nz = 0,$$

per lo che bisogna che sia

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & l & m & n \\ l & A & D & E \\ m & D & B & F \\ n & E & F & C \end{vmatrix} > 0,$$

si hanno per le coordinate dei punti d'intersezione

$$(2) \quad x = \frac{-2nQ\Delta}{R\delta + Q\varepsilon}, \quad y = \frac{2nR\Delta}{R\delta + Q\varepsilon}, \quad z = \frac{2(lQ - mR)\Delta}{R\delta + Q\varepsilon},$$

in cui $Q = S \mp \sqrt{S^2 - RT}$, essendo

$$R = An^2 + Cl^2 - 2Eln, \quad S = Dn^2 + Clm - Emn - Fln,$$

$$T = Bn^2 + Cm^2 - 2Fmn, \quad \delta = bn - cm, \quad \varepsilon = cl - an,$$

$$\varphi = am - bl,$$

ed $S^2 - RT$ il valore del determinante (1) moltiplicato per n^2.

Per maggiore semplicità suppongo i tre cerchi dati coi centri ai vertici del triangolo fondamentale, ossia prendo per detto triangolo quello costituito dai centri dei tre cerchi, essendo perciò a, b, c le distanze scambievoli tra essi centri; in corrispettivo li dirò cerchio (A), cerchio (B), cerchio (C), e denoto con α, β, γ i relativi raggi.

Con questa condizione l'equazioni dei detti tre cerchi assumono le forme speciali

$$\Phi_1 = \alpha^2 a^2 x^2 + (\alpha^2 - c^2) b^2 y^2 + (\alpha^2 - b^2) c^2 z^2 + 2\alpha^2 a b x y + 2\alpha^2 a c x z$$

$$+ 2\left(\alpha^2 - \frac{w_1}{2a}\right) b c y z = 0,$$

$$\Phi_2 = (\beta^2 - c^2) a^2 x^2 + \beta^2 b^2 y^2 + (\beta^2 - a^2) c^2 z^2 + 2\beta^2 a b x y$$

$$+ 2\left(\beta^2 - \frac{w_2}{2b}\right) a c x z + 2\beta^2 b c y z = 0,$$

$$\Phi_3 = (\gamma^2 - b^2) a^2 x^2 + (\gamma^2 - a^2) b^2 y^2 + \gamma^2 c^2 z^2 + 2\left(\gamma^2 - \frac{w_3}{2c}\right) a b x y$$

$$+ 2\gamma^2 a c x z + 2\gamma^2 b c y z = 0;$$

quindi pei loro assi di similitudine p, p', p'', p''', cioè p asse di similitudine diretta, e gli altri d'inversa, di cui p' è quello che passa pel centro di similitudine diretta di (B) e (C), p'' pel centro di similitudine diretta di (A) e (C), e p''' passante pel centro di similitudine diretta di (A) e (B), si hanno l'equazioni

$$\alpha a x + \beta b y + \gamma c z = 0, \quad -\alpha a x + \beta b y + \gamma c z = 0,$$

$$\alpha a x - \beta b y + \gamma c z = 0, \qquad \alpha a x + \beta b y - \gamma c z = 0,$$

delle quali è notevole: 1° che allorquando i tre cerchi sono di eguale raggio, l'equazione di p si commuta, come dev'esserlo, nell' equazione della retta all'infinito; 2° che dall'equazione di p si passa a quelle di p', p'', p''' cangiando a volta a volta i segni di α, β, γ.

I vari cerchi tangenti a tre dati, come si sa, si distinguono a coppie in quattro gruppi dipendenti dai menzionati assi di similitudine; in primo luogo, prendiamo a considerare la coppia dipendente da p, cioè costituita dai due cerchi tangenti l'uno esteriormente, e l'altro interiormente a tutti e tre i cerchi dati, e per brevità li diremo cerchio (K),

e cerchio (K'); relativamente ai quali designiamo in genere $x_0 y_0 z_0$ le coordinate del centro, r_0 il raggio, $x_a y_a z_a$ le coordinate del punto di contatto col cerchio (A), e similmente rispetto a (B) e (C); ed è facile rilevare che debbono sussistere le seguenti relazioni

$$(3) \qquad x_a = \frac{\alpha x_0 \pm r_0 a'}{\alpha \pm r_0}, \quad y_a = \frac{\alpha y_0}{\alpha \pm r_0}, \quad z_a = \frac{\alpha z_0}{\alpha \pm r_0},$$

$$(4) \qquad x_b = \frac{\beta x_0}{\beta \pm r_0}, \quad y_b = \frac{\beta y_0 \pm r_0 b'}{\beta \pm r_0}, \quad z_b = \frac{\beta z_0}{\beta \pm r_0},$$

$$(5) \qquad x_c = \frac{\gamma x_0}{\gamma \pm r_0}, \quad y_c = \frac{\gamma y_0}{\gamma \pm r_0}, \quad z_c = \frac{\gamma z_0 \pm r_0 c'}{\gamma \pm r_0},$$

il segno $\pm$ precederà ad r_0 secondochè riferiscesi al cerchio (K), ovvero a (K').

Denotiamo u_1, u_2, u_3 le rette, che partenti dal centro radicale dei tre cerchi dati, vanno ai poli P_1, P_2, P_3 della retta p relativamente al cerchio (A), al cerchio (B), al cerchio (C), le loro equazioni $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ devono essere verificate rispettivamente dalle (3), (4), (5); ora, se noi formiamo quest'equazioni, e nelle due prime facciamo le menzionate sostituzioni delle (3), (4), ponendo per brevità

$$(6) \quad d_1^2 = c^2 - (\alpha - \beta)^2, \quad d_2^2 = b^2 - (\alpha - \gamma)^2, \quad d_3^2 = a^2 - (\beta - \gamma)^2,$$

$$(7) \quad k_1 = (\alpha - \beta) d_2^2 - (\alpha - \gamma) d_1^2, \quad a m_1 = w_1 d_1^2 - 2ac^2 d_2^2, \quad a n_1 = 2ab^2 d_1^2 - w_1 d_2^2,$$

$$(8) \quad k_2 = (\alpha - \beta) d_3^2 + (\beta - \gamma) d_1^2, \quad b l_2 = 2bc^2 d_3^2 - w_2 d_1^2, \quad b n_2 = w_2 d_3^2 - 2a^2 b d_1^2,$$

$$(9) \qquad u_0 = \pm r_0 \,.\, 4\Delta,$$

otteniamo le due seguenti

$$(10) \qquad \begin{cases} m_1 b y_0 + n_1 c z_0 + k_1 u_0 = -2\Delta \,.\, 2 k_1 \alpha, \\ l_2 a x_0 + n_2 c z_0 + k_2 u_0 = -2\Delta \,.\, 2 k_2 \beta. \end{cases}$$

Quanto poi alla $u_3 = 0$, posto

$$(11)\quad \begin{cases} n_3 = [(\alpha - \gamma)d_3^2 - (\beta - \gamma)d_2^2]\,2\gamma\,, \quad c l_3 = c n_3 + 2 b^2 c d_3^2 - w_3 d_2^2\,, \\ c m_3 = c n_3 - 2 a^2 c d_2^2 + w_3 d_3^2\,, \end{cases}$$

si presenta nella forma

$$(12)\qquad l_3 a x + m_3 b y + n_3 c z = 0\,;$$

e di seguito alle (2) prendendo in considerazione i punti d'incontro di questa retta u_3 col cerchio (C), atteso il rapporto $x_c : y_c = x_0 : y_0$, ne deriva l'equazione

$$(13)\qquad b R_3 .\ a x_0 + a Q_3 .\ b y_0 = 0\,,$$

in cui R_3, Q_3, parimente che S_3, T_3, sono le quantità sopra designate R, Q, S, T, riferendole all'incontro di u_3 con (C); perciò stante la (12) e la $\Phi_3 = 0$ si hanno

$$(14)\qquad \begin{cases} R_3 = 4 a^2 c^2 \gamma^2 d_2^2 (b^2 d_1^2 d_3^2 - 4 d_2^2 \Delta^2)\,, \\ S_3 = 2 a b c \gamma^2 d_2^2 d_3^2 (w_3 d_1^2 - 8 c \Delta^2)\,; \end{cases}$$

inoltre posto $S_3^2 - R_3 T_3 = c^2 n_3^2 \Omega_3^2$, sicchè

$$(15)\qquad Q_3 = R_3 \mp c n_3 \Omega_3\,,$$

si ha

$$\Omega_3^2 = \begin{vmatrix} 0, & a l_3, & b m_3, & c n_3 \\ a l_3, & A, & D, & E \\ b m_3, & D, & B, & F \\ c n_3, & E, & F, & C \end{vmatrix},$$

e riducendo, stante le (11) ed i valori di A, B, ..., F presi dalla $\Phi_3 = 0$, risulta

$$(16)\qquad \Omega_3 = 4 a b c \gamma d_1 d_2 d_3 \Delta.$$

Prese in coesistenza le (10), (13) con la $a x_0 + b y_0 + c z_0 = 2\Delta$, si ha un sistema di quattro equazioni lineari in x_0, y_0, z_0, u_0, le quali risolute, con porre a denominatore comune delle varie incognite,

$$(17) \qquad M = \begin{vmatrix} (n_2 - l_2) k_1 - n_1 k_2, & b R_3 \\ (m_1 - n_1) k_2 + n_2 k_1, & a Q_3 \end{vmatrix},$$

forniscono l'espressioni

$$(18) \begin{cases} x_0 = - \begin{vmatrix} n_1 + 2\alpha k_1, & k_1 \\ n_2 + 2\beta k_2, & k_2 \end{vmatrix} \dfrac{2\Delta}{M} Q_3, \quad y_0 = \begin{vmatrix} n_1 + 2\alpha k_1, & k_1 \\ n_2 + 2\beta k_2, & k_2 \end{vmatrix} \dfrac{2\Delta}{M} R_3, \\ z_0 = \begin{vmatrix} 2(\alpha - \beta) k_1 k_2 - k_1 l_2, & b R_3 \\ 2(\alpha - \beta) k_1 k_2 + m_1 k_2, & a Q_3 \end{vmatrix} \dfrac{2\Delta}{c M}, \end{cases}$$

$$(19) \qquad \alpha \pm r_0 = \begin{vmatrix} l_2 n_1 - 2(\alpha - \beta) k_2 n_1, & b R_3 \\ 2(\alpha - \beta)(m_1 - n_1) k_2 - m_1 n_2, & a Q_3 \end{vmatrix} : 2M.$$

La Q_3 ha in genere un doppio valore, quindi ne risultano per ciascuna incognita $x_0 y_0 z_0$ due valori, però dovendosi introdurre nelle (18) a parità lo stesso valore di Q_3, ne deriva che di esse incognite si hanno due soli sistemi di valori; quanto poi alla (19) si è già rilevato che il $\pm$ precedente ad r_0 vale, secondochè trattasi del cerchio (K), o di (K'), ed in corrispettivo devesi accoppiare quel valore di Q_3, che faccia risultare positivo l'un raggio e l'altro; così con questo tale valore di Q_3 si saprà scegliere il sistema di valori delle $x_0 y_0 z_0$ appartenente all'un cerchio, ed all'altro.

Le trovate espressioni (18), (19) sembrano trovarsi in difetto, manifestandosi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, in alcuni casi particolari, come: allorchè $\alpha = \beta = \gamma$; quando con $a = b$ fosse $\alpha = \beta$; nei quali casi però riuscirà facile con attento esame di fare scomparire tale forma d'indeterminazione. Per brevità tralascio di esaminare queste, ed altre particolarità, cui può dar luogo il problema, e fra di esse anche il caso che i centri dei dati circoli fossero in linea retta, con che sarebbe $\Delta = 0$.

Osservo bensì che siccome la determinazione degli altri tre gruppi

di cerchi tangenti ad (A), (B), (C) dipende rispettivamente dagli assi p', p'', p''', così basta per conseguire l'espressioni delle coordinate del relativo centro, e del raggio, che nelle formole superiormente date rispetto a (K), (K'), si cangino a volta a volta i segni di α, β, γ.

Palermo, 25 dicembre 1889.

F. CALDARERA.

OSSERVAZIONI SULLA NOTA PRECEDENTE; (*)

per il prof. **M. L. Albeggiani**, in Palermo.

Adunanza del 12 gennajo 1890.

Muovendo dalle proprietà di cui godono le circonferenze tangenti a tre circonferenze date, proprietà sulle quali l'egregio prof. Caldarera in parte fonda la sua dimostrazione, e riferendo i punti del piano ad un sistema di coordinate ortogonali qualunque, si perviene ad ottenere per le coordinate del centro e per la lunghezza del raggio di una di tali circonferenze, espressioni di gran lunga più semplici di quelle alle quali arriva il suddetto professore con l'ajuto di un sistema di coordinate triangolari sia pur questo quello, del resto abbastanza naturale, in cui il triangolo formato dai centri delle tre circonferenze date è triangolo di riferimento.

In ciò che segue farò uso delle notazioni e delle equazioni che si trovano nella XV^a Lezione della monografia dell'Hesse: « *Vorlesungen aus der analytische Geometrie der Geraden, des Punktes und des Kreises in der Ebene* ».

Posto

$$k_i = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2,$$

siano

$$k_0 = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_2 = 0$$

(*) *Sistema di circoli tangenti a tre cerchi dati, in coordinate trilineari;* Nota del prof. F. Caldarera. (Questi *Rendiconti*, t. IV; pp. 43-49).

le equazioni delle circonferenze date. Supponendo inoltre di prendere in considerazione quella circonferenza rispetto alla quale le circonferenze date restano tangenti esternamente, le coordinate x, y del centro di essa soddisfano alla equazione:

$$(1) \qquad r_0(k_1 - k_2) + r_1(k_2 - k_0) + r_2(k_0 - k_1) = 0$$

che è quella della retta la quale passa per il centro radicale delle circonferenze date ed è perpendicolare al loro asse di similitudine esterno.

Dette ora r, x', y' la lunghezza del raggio della circonferenza cercata e le coordinate del punto di contatto di essa con la circonferenza $k_0 = 0$, si hanno le relazioni:

$$(2) \qquad x - a_0 = \frac{(r + r_0)(x' - a_0)}{r_0}, \qquad y - b_0 = \frac{(r + r_0)(y' - b_0)}{r_0}$$

$$(3) \qquad (x' - a_0)^2 + (y' - b_0)^2 - r_0^2 = 0$$

$$(4) \qquad \frac{k'_1 - k'_0}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - \frac{k'_2 - k'_0}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2} = 0$$

dove k'_i indica ciò che diventa k_i per $x = x'$, $y = y'$ e $[ij]$ indica la distanza dei centri delle circonferenze (k_i), (k_j). La (4), come è noto, esprime che il punto di contatto cercato è uno dei punti d'intersezione della circonferenza (k_0) con la retta che unisce il centro radicale sudetto al polo, rispetto alla circonferenza (k_0), dell'asse di similitudine esterno.

Ponendo per brevità:

$$L_0 = \frac{l_1 - l_0}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - \frac{l_2 - l_0}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2},$$

la (4) si può scrivere

$$(5) \qquad A_0(x' - a_0) + B_0(y' - b_0) + R_0 r_0 = 0,$$

la quale combinata con la (3) dà:

$$x' - a_0 = - \frac{r_0}{A_0^2 + B_0^2} [A_0 R_0 - B_0 H_0],$$

$$y' - b_0 = - \frac{r_0}{A_0^2 + B_0^2} [B_0 R_0 + A_0 H_0],$$

dove

$$H_0 = \pm \sqrt{A_0^2 + B_0^2 - R_0^2}.$$

Dalle (2), tenendo presente la (5), si trova:

$$(6) \qquad A_0(x - a_0) + B_0(y - b_0) + R_0(r + r_0) = 0;$$

inoltre il centro cercato deve trovarsi sulla retta che unisce il centro della circonferenza (k_0) col punto di contatto (x', y'), quindi in seguito alla (6), sussiste anche la

$$(7) \qquad B_0(x - a_0) - A_0(y - b_0) - H_0(r + r_0) = 0.$$

Il sistema di equazioni (1), (6), (7) lineari nelle x, y, r lascia determinare in modo semplice tali incognite: il segno di H_0 sarà evidentemente quello che rende positivo il valore trovato di r, come per la quantità chiamata Q_3 dal prof. Caldarera.

Mutando r_0, r_1, r_2 in $-r_0$, $-r_1$, $-r_2$ si trovano le espressioni analoghe relative alla circonferenza rispetto alla quale le circonferenze date sono tangenti internamente: mutando poi opportunamente i segni di uno o di due dei raggi r_0, r_1, r_2 ed in conformità tenendo conto di ciascuno degli altri assi di similitudine, si ottengono, in simil modo, le espressioni dei raggi e delle coordinate dei centri delle rimanenti sei circonferenze.

Per ultimo si osserva che la forma delle A_0, B_0, R_0, H_0 è assai propria per lasciar discutere i diversi casi di possibilità del problema.

Come si scorge, nè la difficoltà della ricerca, nè la complicazione dei calcoli non permisero ai vari Autori che trattarono analiticamente questo problema, di dare le espressioni dei raggi e delle coordinate dei

centri delle circonferenze cercate; soltanto lo scopo al quale essi mirarono, più conforme del resto alla natura del problema, fu di scoprire per mezzo dell'analisi, quelle particolari proprietà geometriche le quali avessero potuto renderne facile ed elegante la costruzione; raggiunta la meta non si curarono di andare oltre, ritenendo, a buon dritto, ogni altra ricerca, intesa a ritrovare le quantità suddette, un semplice esercizio di calcolo, priva d'interesse e come tale oziosa. Basta leggere in proposito la Nota del Gergonne (*), il quale, credo, fu il primo ad occuparsi della quistione col mezzo delle geometria analitica, per accorgersi dello spirito che la informa; in principio di essa è scritto: . . . . . . dans le dessein de venger complètement la géométrie analitique du reproche qu'on ne lui fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure, pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analitique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes, les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles: je veux parler du problème où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois cercles donnés* et de celui où il est question de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données.*

Palermo, gennaio 1890.

M. L. ALBEGGIANI.

(*) Gergonne: *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan.*— Ann. de Mat. pures et appliquées, rédigées par J. D. Gergonne, t. VII, 1816 et 1817.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES;

par M. **Georges Humbert**, à Paris.

Adunanza del 22 dicembre 1889.

Dans une Note insérée aux procès-verbaux des séances du *Circolo Matematico*, tome III (1889), page 277, nous avons énoncé, sans démonstration, quelques théorèmes relatifs à une classe de surfaces algébriques représentées par les équations:

$$\rho x_i = \sum \Theta(u)\theta(v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

Θ et θ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de genres respectifs p et p', de la première famille établie par M. Poincaré.

En particulier, nous avons fait observer que le genre de ces surfaces était égal à pp', si, à tout point de la surface, ne correspondait qu'un seul système de valeurs de u et de v: la démonstration de ce théorème est fort simple, nous allons la donner en quelques lignes, dans le but d'en déduire une conséquence intéressante, applicable au cas où la condition précédente n'est pas remplie.

Nous appellerons *genre* d'une surface algébrique, $f(x, y, z) = 0$, le nombre des intégrales doubles linéairement distinctes de la forme

$$\int\int P(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{2}$$

où P est rationnel, qui ne deviennent infinies en aucun point de la surface: ce sont les intégrales dites de *première espèce*.

Dans le cas des surfaces (1), que la condition énoncée soit ou non satisfaite, toute intégrale du type (2) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \int\int \frac{\sum A(u)B(v)}{\sum a(u)b(v)}\,du\,dv,$$

où A, B, a, b sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, telles que les ordres de a et b soient respectivement inférieurs de une unité aux ordres de A et B.

Pour que l'intégrale (3) soit toujours finie, il faut d'abord que l'intégrale simple

$$\int \frac{\sum A(u)B(v)}{\sum a(u)b(v)}\,du$$

reste finie quand on y considère v comme constant, ce qui exige que l'expression sous le signe $\int$ se réduise à $\Sigma F(u)\varphi(v)du$, $F(u)$ étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre un; de même $\varphi(v)$ doit être une fonction de même nature, et il est clair alors que l'intégrale

$$(4) \qquad \int\int F(u)\varphi(v)\,du\,dv,$$

produit de deux intégrales simples finies, est elle-même toujours finie.

On voit d'ailleurs sans difficulté que toute intégrale de la forme (4) est aussi de la forme (2), pourvu qu'à chaque point de la surface (1) ne corresponde qu'un système de valeurs de u et de v.

Dans ce cas, le nombre des intégrales (4), linéairement distinctes, s'obtient en combinant chacune des p fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, $F(u)$, d'ordre un, avec chacune des p' fonctions thêtafuchsiennes analogues, $\varphi(v)$: le nombre cherché, qui représente le genre de la surface, est donc pp'.

Si, au contraire, à un point de la surface correspondent plusieurs systèmes de valeurs de u et de v, toutes les intégrales (4) ne seront pas de la forme (2), et le genre de la surface sera inférieur à pp', à moins que pp' ne soit nul, auquel cas le genre de la surface est nul également.

En particulier, si p est nul, c.-à.-d. si l'on peut tracer sur la sur-

face une série, simplement infinie, de courbes unicursales, le genre e
égal à zéro : il est bien entendu que, d'après la définition adoptée,
genre d'une surface ne peut être négatif. Donc :

Toute surface (1) *est de genre* pp', *si, à un point de la surface,*
correspond qu'un système de valeurs de u *et de* v, c.-à.-d. si par chaqu
point ne passe qu'une seule des courbes que nous avons appelées, dar
la Note précitée, C ou C'; *dans le cas contraire, le genre est inférie*
à pp'.

Toute surface, sur laquelle on peut tracer une série QUELCONQUE
simplement infinie, de courbes unicursales, est de genre zéro.

Pour terminer, nous signalerons une conséquence du théorème I
de notre Note des *Rendiconti*: si chaque surface d'un système

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = 0, \tag{5}$$

F étant entier en x et λ, découpe sur une surface S une courbe uni-
cursale, les fonctions $\Theta(u)$ et $\theta(v)$ sont des fonctions entières de u e
de v, dans les équations (1), et par suite les coordonnées d'un poin
de S sont fonctions rationnelles de deux paramètres. En particulier, le
surfaces dont toutes les sections planes sont de genre un appartiennen
à cette classe, puisque les plans tangents en tous les points d'une courb
unicursale tracée sur une telle surface ont une équation de la form
(5), et coupent la surface suivant une courbe unicursale. Mais cett
démonstration ne parait pas prouver directement que la surface soi
représentable *point par point* sur un plan. Elle est d'ailleurs de genr
zéro, d'après ce qui précède.

Palerme, décembre 1889.

GEORGES HUMBERT.

LE LINEE ISOFOTE DELLE RIGATE ALGEBRICHE;

Nota di **Cesare Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 26 gennajo 1890.

È noto che l'intensità luminosa i di un elemento di una superficie — essendo la sorgente della luce posta a distanza infinita — è proporzionale al seno dell'angolo w che il raggio luminoso l fa con quell'elemento. I punti (semplicemente infiniti) di una superficie Σ che hanno una data illuminazione i, formano la *linea isofota* di intensità i di Σ, e questa linea non è altro che la curva di contatto della sviluppabile Σ', di costante pendenza $w =$ arco sen i rispetto ad l, circoscritta a Σ.

Mi propongo in questa breve Nota di studiare le principali proprietà delle isofote di una rigata algebrica.

1. Indicheremo con Σ_i la sviluppabile di costante pendenza $w =$ arco sen i circoscritta alla rigata Σ; con η_i la linea di contatto di Σ_i con Σ, cioè la isofota di intensità i; con G_i la direttrice all'infinito di Σ_i e con l la direzione dei raggi luminosi.

Le G_i formano un fascio di coniche che si toccano nei punti ciclici D_1, D_2 del piano normale ad l, ed hanno per tangenti nei punti D_1, D_2, le rette $G_0 D_1$, $G_0 D_2$.

Per il punto H all'infinito di una generatrice (ordinaria) g di Σ possono condursi a G_i due tangenti, rette all'infinito di due piani uscenti da g che toccano Σ in due punti A e B di intensità lumi-

nosa i. Le coppie di tangenti condotte da H alle coniche G_r, sono coppie di raggi di un'involuzione le cui rette doppie sono HG_0 e la tangente in H alla conica G_j che passa per H. Da H non possiamo condurre alle coniche G_r, $r > j$, tangenti reali e quindi j è la massima (relativa) intensità luminosa che possono avere i punti di g. Dunque:

I. — *Le isofote η_i di Σ tagliano ogni sua generatrice in coppie di punti coniugati in un' involuzione I_g che ha per punti doppi, il punto di minima (assoluta — indice zero) e il punto di massima (relativa) intensità luminosa della generatrice che si considera* (*).

Sieno i, i', i'', gl' indici della massima (relativa) intensità luminosa di tre generatrici (ordinarie), g, g', g'' infinitamente vicine. I tre numeri i, i', i'', sono evidentemente diseguali, e quindi uno di essi, p.e. i', è compreso fra gli altri due i, i'' e conseguentemente il punto di H all'infinito di g, p.e. sarà esterno alla conica $G_{i'}$ e il punto H'' interno; allora in g sono reali i punti di intensità luminosa i' e immaginari in g''. Dunque:

II. — *Se in una generatrice g di Σ il punto P di massima (relativa) intensità luminosa è di indice i la η_i è tangente in P alla generatrice g.*

2. Supponiamo che la rigata Σ sia dell'ordine n e del genere p. La sua direttrice ρ all'infinito è di ordine n e classe $k = 2(n + p - 1)$. A ρ e alla conica G_i possiamo condurre $2k$ tangenti comuni; la η_i ha dunque $2k$ punti all'infinito, cioè è di ordine $2k$.

Se in η_i vi è un punto doppio esso deve esser doppio per l'involuzione I_g della generatrice g che passa per esso, quando però tale involuzione non sia degenere. Se I_g non è degenere uno dei suoi punti doppi appartiene ad η_0 e nell'altro è tangente la η_i essendo i l'indice di massima intensità luminosa di g; nelle generatrici ordinarie di

(*) Questo teorema dà il modo di costruire le η_i di Σ (per un determinato sistema di valori di i) qualunque sia il sistema di rappresentazione di cui si fa uso. Per ciò che riguarda la costruzione dei coni circolari aventi G_i per direttrici si vegga Fiedler « *Geometria descrittiva* » per la proiezione centrale e sistema Monge: Tessari « *Teoria delle ombre e del chiaro scuro* » per la sola rappresentazione Monge.

Σ dunque la η_i non ha punti doppi. In ogni generatrice singolare di Σ l'involuzione I_g è degenere e per ogni cuspide passano con due rami tutte le η_i. Le η_i hanno dunque un punto doppio in ogni cuspide di Σ.

Dalla nota relazione (*) che lega l'ordine e il genere di una curva della rigata con l'ordine e il genere della rigata stessa, osservando che $2(n+2p-2)$ sono le cuspidi di Σ (**) e quindi $2(n+2p-2)$ i punti doppi di η_i, avremo per il genere π di η_i

$$\pi = n + 2p - 1.$$

Una curva che incontri h volte ogni generatrice di Σ e sia di genere π ha $2(\pi - 1) - 2h(p - 1)$ (***) generatrici tangenti e quindi esistono $2n$ generatrici di Σ tangenti a η_i. (Ciò poteva dedursi anche osservando che G_i taglia ρ in $2n$ punti; ne risulta come caso particolare il numero dei punti cuspidali di Σ).

Le rette che da G_0 vanno ai punti ciclici D_1, D_2 del piano normale ad l, sono rette all'infinito di $2n$ piani tangenti a Σ in $2n$ punti immaginari, nei quali, evidentemente, si toccano tutte le η_i.

Dunque:

III.—*La η_i è dell'ordine $4(n+p-1)$ e del genere $n+2p-1$* (****); *è tangente a $2n$ generatrici e tangente a tutte le altre η in $2n$ punti fissi immaginari nei quali il piano tangente alla rigata è parallelo ad l e passa per uno dei punti ciclici del piano normale ad l; ha infine un punto doppio in ciascuno dei $2(n+2p-2)$ punti cuspidali di Σ.*

La η_0 è di ordine $k = 2(n+p-1)$ poichè da G_0 non possono

(*) C. Segre: « *Intorno alla geometria su di una rigata algebrica* », Rendiconti R. Accademia Lincei 1887 — Oppure: « *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* », Mathematische Annalen, B. XXXII.

(**) Questo numero mi fu gentilmente comunicato dal ch.mo prof. C. Segre. Si può determinare in modo assai semplice osservando che le curve di contatto con Σ di due coni di vertici V e V' (non situati in Σ) circoscritti a Σ, si tagliano in $2k-n$ punti, e poichè per la retta VV' non si possono condurre a Σ che n piani tangenti $2k - 2n = 2(n+2p-2)$ è il numero delle cuspidi di Σ.

(***) Zeuthen, Math. Annalen, III, p. 152.

(****) La η_i non può dunque essere di genere zero.

condursi a ρ che k tangenti. Essa incontra una sol volta ogni generatrice di Σ e passa semplicemente per i $2(n+p-2)$ punti cuspidali di Σ; incontra ogni η_i $(i \lessgtr 0)$ in $2n$ punti (*), oltre i $2(n+2p-2)$ punti cuspidali, i quali punti sono evidentemente quelli nei quali tutte le η_i si toccano.

I punti di massima assoluta (indice 1) intensità luminosa sono n e giacciono in quelle generatrici che hanno il punto all'infinito sulla retta G_1.

3. La direttrice G_i all'infinito di Σ_i è multipla secondo n per Σ_i, e quindi per la classe N di Σ_i abbiamo

$$N = 2n.$$

Nel piano all'infinito vi sono $2k$ generatrici di Σ_i, cioè le tangenti comuni a G_i e a ρ; quindi per il rango R di Σ_i abbiamo

$$R = 2(n+k).$$

Essendo $n + 2p - 1 = p + \frac{1}{2}k$ il genere di Σ_i $(i \gtrless 0)$ è nullo il numero dei piani stazionari di Σ_i, quindi per l'ordine dello spigolo di regresso di Σ_i abbiamo

$$M = 6k$$

e quindi η_i non può mai coincidere con un'asintotica di Σ.

4. Indichiamo con σ la linea e con Σ_σ la sviluppabile di stringimento di Σ; con ρ'' la curva all'infinito di Σ_σ e con ρ' la polare reciproca della curva all'infinito ρ di Σ rispetto alla conica assoluta. I punti delle due curve sono in corrispondenza $(1, 1)$ ed è pure noto

(*) È noto che due curve di Σ di ordini ν e ν' che incontrino h e h' volte ogni generatrice di Σ hanno $\nu h' + \nu' h - nhh'$ punti comuni.

che essendo ρ dell'ordine n e della classe k, ρ' è dell'ordine k e della classe n; l'inviluppo ρ'' delle rette che congiungono le coppie corrispondenti di ρ e ρ' è della classe $n + k$ (*).

Affinchè la linea di stringimento σ di Σ coincida con una delle η_i è necessario e sufficiente che ρ'' coincida con G_i, si dovrà quindi avere $n + k = 2n$. Dunque :

IV.—*Le sole quadriche rigate possono avere la linea di stringimento coincidente con una delle linee isofote. Se la* η_0 *coincide con* σ, Σ_σ *è un cilindro le cui generatrici sono parallele ai raggi luminosi.*

Da G_0 possono condursi $n + k$ tangenti a ρ''; ρ'' e G_i ammettono $2(n + k)$ tangenti comuni. Dunque:

V.—*La* η_i *taglia la linea di stringimento (fuori dei punti cuspidali) in* $2(n + k)$ *punti, e taglia la* η_0 *in* $n + k$ *punti.*

La linea di stringimento σ incontra una sol volta ogni generatrice di Σ e passa semplicemente per i $2(k - n)$ punti cuspidali di Σ. Allora se x è l'ordine di σ dovremo avere:

$$2x + 2k - 2n - 4(k - n) = 2(n + k)$$

da cui $x = 2k$; cioè è $4(n + p - 1)$ l'ordine della linea di stringimento di una rigata di ordine n e genere p (**).

5. È noto che delle coniche G_i ne esistono $2(2n+p-1) = k+2n$

(*) È noto che se tra i punti di due curve γ e γ' di ordini n e n' si stabilisce una corrispondenza (h, h'), la classe dell'inviluppo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti di γ e γ' è $nh' + n'h$.

(**) In generale. Se γ è una linea semplice) di Σ di ordine ν che incontra h volte ogni generatrice ed ha un punto r-plo (ordinario) in ciascuno dei punti cuspidali di Σ senza avere altri punti doppi, è facile vedere che per la classe N della sviluppabile Σ_γ circoscritta a Σ lungo γ si ha

$$N = \nu + (h - 2r)(n + 2p - 2)$$

e per il rango R, essendo α il numero dei piani stazionari di Σ_γ, e π il genere di γ

$$R = 2\{\pi - 1 + \nu + (h - 2r)(n + 2p - 2)\} - \alpha.$$

Da queste formule si ottengono di nuovo i risultati del § 51.

tangenti a ρ (*). Di questi $k + 2n$ contatti, n sono compresi e assorbiti dalle n intersezioni della retta doppia G_1 con ρ. Dunque:

VI.—*Esistono $k + n$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima (relativa) intensità luminosa all'infinito.*

Indichiamo con ξ la curva luogo dei punti di massima intensità luminosa delle generatrici di Σ. Questa curva ξ passa semplicemente per i $2(k - n)$ punti cuspidali di Σ, taglia una sol volta ogni generatrice di Σ ed è di ordine $k + n$. Essa ha dunque comuni con η_i, fuori dei punti cuspidali, $4n$ punti. Esistendo solo $2n$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima intensità luminosa di indice i, le rimanenti $2n$ intersezioni devono essere assorbite nei $2n$ punti fissi immaginari nei quali si toccano tutte le η_i. Dunque:

VII.—*La curva ξ, di ordine $k + n$, luogo dei punti di massima intensità luminosa, passa per i $2n$ punti fissi immaginari nei quali si toccano le η_i ed incontra ogni η_i in altri $2n$ punti nei quali sono tangenti a η_i le generatrici che passano per essi. La ξ contiene inoltre gli n punti di massima (assoluta) illuminazione di Σ.*

La ξ ha, fuori dei punti cuspidali, $2n$ punti comuni con η_0 e questi sono i $2n$ punti fissi nei quali si toccano le η_i.

La ξ ha, fuori dei punti cuspidali, $2n + k$ punti comuni con la linea di stringimento e quindi esistono $2n + k$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima (relativa) luce nella linea di stringimento (**).

Torino, ottobre 1889.

CESARE BURALI-FORTI.

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. 2°, pag. 94.

(**) Da ciò può dedursi in particolare che esistono $2n+k$ punti P di ρ, per ognuno dei quali una delle $n+k$ tangenti che possono esser condotte a ρ'' è tangente alla conica G_i che passa per P.

ESTRATTI DAI VERBALI.

[*Vedi* tomo III, pag. 273 e *retro*].

Per le pubblicazioni periodiche e non periodiche ricevute in dono o in cambio dei Rendiconti e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte: *Biblioteca Matematica*.

ADUNANZA STRAORD. DEL 5 GENNAJO 1890 (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — La Società Matematica di Amburgo, nel festeggiare il 200° anniversario della sua fondazione invia la prima parte della Storia della Società medesima dal 1690 al 1890. Il Circolo delibera di ringraziare la detta Società e di mandare ad essa in dono i volumi dei *Rendiconti* già pubblicati.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor Giorgio Floridia (Palermo), proposto dai soci Capitò ed Albeggiani (M. L.), è eletto *socio residente*.

Elezione dell'Ufficio di Presidenza pel biennio 1890-1891. – Ai sensi degli articoli 14 e 15 dello Statuto si procede alla votazione, a scrutinio segreto, dell'intero Ufficio di Presidenza, con unica scheda. Votanti 13, maggioranza 7. Si hanno i seguenti voti:

Per Presidente: Albeggiani (G.) 12, Caldarera 1.

Per Vice Presidente: Caldarera 9, Guccia 2, Giudice 1, Venturi 1.

Per Segretari: Albeggiani (M. L.) 12, Guccia 10, Gebbia 4.

Per Vice Segretari: D'Arone 10, Pepoli 9, Certo 1, Mastricchi 1.

Per Tesoriere: Porcelli 11.

Per Bibliotecari: Morisani 12, Bontade 9, Certo 3, Pepoli 1.

Rimangono eletti: G. Albeggiani, presidente; Caldarera, vice presidente; M. L. Albeggiani e Guccia, segretari; D'Arone e Pepoli, vice segretari; Porcelli, tesoriere; Morisani e Bontade, bibliotecari.

Memorie e Comunicazioni.

MARTINETTI: *Sul genere delle curve Ω nelle involuzioni piane di classe qualunque.*

GEBBIA: *Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito.*

CALDARERA: *Sistema di circoli tangenti a tre cerchi dati, in coordinate trilineari.*

ALBEGGIANI (M. L.) Si riserva nella prossima adunanza di prendere la parola sulla comunicazione precedente del socio Caldarera.

ADUNANZA DEL 12 GENNAJO 1890 (Presidenza A. Venturi).

Corrispondenza. — Il *Nova Scotian Institute of Natural Science* chiede il regolare cambio dei *Rendiconti* del Circolo coi propri *Proceedings* e *Transactions*. Il Circolo accetta.

Affari interni. — Su proposta dell'Ufficio di Presidenza, il Circolo delibera che: « in via eccezionale, sino al 31 dicembre 1890, ogni socio che volesse completare la propria collezione dei *Rendiconti* potrà farlo, una sola volta e pei volumi

« pubblicati prima della sua ammissione, al prezzo di Lire 6 cadauno, franco di |
« nel Regno e in tutti gli stati dell'Unione generale postale ».

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazione a schede segrete, il dott. V cenzo Reina (Roma), proposto dai soci Pittarelli e Gerbaldi, è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

ALBEGGIANI (M. L.): *Osservazioni sopra la Comunicazione fatta dal socio* (*darera nella adunanza precedente.*

GEBBIA: *Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio in* (Continuazione).

GIUDICE: *Due teoremi sulle serie a termini positivi.*

Il Teorema che Cauchy ha dato sulle serie a termini positivi, a pag. 13 suo *Cours d'Analyse*, è contenuto in questi:

TEOREMA I. — *Se*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

è una serie convergente a termini positivi non mai crescenti e

$$k_1 \; k_2 \; k_3 \ldots$$

è una successione di interi aritmetici soddisfacenti, qualunque sia m, la

$$k_m : k_{m+1} < \lambda < 1$$

dove λ è numero dato, è convergente anche la serie

$$k_1 u_{k_1} + k_2 u_{k_2} + k_3 u_{k_3} + \ldots$$

Infatti, dalla precedente relazione si ricava

$$k_{m+1} < \frac{1}{1-\lambda}(k_{m+1} - k_m)$$

$$\sum_1^n {}_n k_n u_{k_n} < \frac{1}{1-\lambda} \cdot \sum_1^{k_n} {}_n u_n \cdot$$

TEOREMA II. — *Se*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

è una serie divergente a termini positivi non mai crescenti e

$$k_1 \; k_2 \; k_3 \ldots$$

è una successione di interi aritmetici soddisfacenti, qualunque sia m, la

$$k_m : k_{m+1} > \mu > 0$$

dove μ *è numero dato, che si può supporre minore di* 1, *è divergente anche la serie*

$$k_1 u_{k_1} + k_2 u_{k_2} + k_3 u_{k_3} + \dots$$

Infatti, dalla precedente relazione si ricava

$$k_m > \frac{\mu}{1-\mu} \cdot (k_{m+1} - k_m)$$

$$\sum_1^n {}_n k_n u_{k_n} > \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sum_{k_1+1}^{k_n} {}_n u_n \,.$$

OSSERVAZIONE. – Si riconosce facilmente che non basta che sia sempre $k_m : k_{m+1} < 1$ per la prima proposizione, nè che sia sempre $k_m : k_{m+1} > 0$ per la seconda, perchè, p. es., mentre è convergente

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$$

è divergente

$$1 + 2 . \frac{1}{1.2} + 3 . \frac{1}{2.3} + 4 . \frac{1}{3.4} + \dots$$

e mentre è divergente

$$\frac{1}{2 . \log 2} + \frac{1}{3 . \log 3} + \frac{1}{4 . \log 4} + \dots$$

è convergente

$$2 . \frac{1}{2 . \log 2} + 2^2 . \frac{1}{2^2 . \log 2^2} + \dots + 2^{(2^n)} . \frac{1}{2^{(2^n)} . \log 2^{(2^n)}} + \dots$$

GERBALDI: *Sui punti sestatici delle curve algebriche piane.*

Il Cayley, che primo richiamò l'attenzione dei geometri su quei notevoli punti delle curve piane, nei quali una conica ha un contatto di quint'ordine, e che lui chiamò *punti sestatici*, trovò (*) che il loro numero in una curva algebrica di grado m generale è $m(12m-27)$, e che, se la curva ha punti doppi, ognuno di questi diminuisce quel numero di 24.

L'abbassamento che subisce il numero dei punti sestatici, quando la curva è dotata di singolarità qualunque, fu poi dato dall'Halphen (**); parmi tuttavia interessante comunicare una semplice osservazione, mediante la quale si calcola l'abbassamento dovuto ai punti doppi e alle cuspidi, facendo uso soltanto delle formole di Plücker.

Siano per la curva: m l'ordine, n la classe, δ il numero dei punti doppi, τ il numero delle tangenti doppie, $\varkappa$ il numero delle cuspidi, ι il numero delle tangenti d'inflessione, s il numero dei punti sestatici, x ed y gli abbassamenti nel numero s per un punto doppio e per una cuspide; si avrà

$$s = m(12m - 27) - x\delta - y\varkappa.$$

(*) *Phil. Transact.*, 1865. — *Comptes rendus*, 1866.

(**) *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1876, t. IV.

L'osservazione di cui ci gioviamo per il calcolo di x ed y è che, se della curva proposta si prende la reciproca, i punti sestatici dell'una corrispondono ai punti sestatici dell'altra; laonde si avrà ancora

$$s = n(12n - 27) - x\tau - y\iota.$$

Quindi concludiamo l'equazione

$$m(12m - 27) - x\delta - y\varkappa = n(12n - 27) - x\tau - y\iota,$$

la quale, quando si sostituiscano ad n, τ, ι le loro espressioni per mezzo di m, δ, $\varkappa$, deve essere identicamente verificata qualunque siano m, δ, $\varkappa$; quindi fatta l'accennata sostituzione si deducono fra x e y più equazioni coesistenti, che danno $x=24$, $y=27$.

Si giunge più speditamente al risultato partendo dalle due note relazioni

$$\frac{1}{2}m(m+3) - \delta - 2\varkappa = \frac{1}{2}n(n+3) - \tau - 2\iota$$

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \delta - \varkappa = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tau - \iota,$$

donde, moltiplicando la prima per 3 e la seconda per 21 e sommando, si deduce

$$m(12m - 27) - 24\delta - 27\varkappa = n(12n - 27) - 24\tau - 27\iota$$

e di qui si vede subito che si ha $x = 24$, $y = 27$.

La formola data da Halphen per il caso delle singolarità ordinarie è

$$12n - 15m + 9\varkappa = 12m - 15n + 9\iota$$

e coincide colla precedente, se ad n e ι si sostituiscono le loro espressioni per mezzo di m, δ, $\varkappa$.

ADUNANZA DEL 26 GENNAJO 1890 (Presidenza G. B. Guccia).

Memorie e Comunicazioni.

BURALI-FORTI: *Le linee isofote delle rigate algebriche.*

BURALI-FORTI: *Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune.*

CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche.*

HUMBERT: *Sur une démonstration inexacte du théorème de Fermat publiée dans le tome XXVII du* « Giornale di Matematiche ».

HUMBERT: *Sur un problème de contact de M. de Jonquières.*

VIVANTI: *Sopra alcune Comunicazioni del Prof. F. Giudice.* [Mantova, 10 gennajo 1890].

Secondo i concetti dell'analisi moderna, una funzione di una variabile reale in un intervallo ab non è che un insieme di valori che corrisponde univocamente all'insieme dei valori reali compresi fra a e b. Non si capisce quindi come possa chiedersi (ciò che fa il prof. Giudice nei *Rendiconti*, 1888, p. 188), se sieno « possibili due funzioni aventi sempre valore eguale in un intervallo nel quale non sono « sempre identiche ». Due funzioni che hanno valore eguale in tutti i punti d'un intervallo non costituiscono in quell'intervallo che *una sola ed unica funzione.*

Ciò mi sembra tanto evidente, che non avrei neppur creduto necessario parlarne, se non trovassi nell'ultimo fascicolo, ieri ricevuto, dei *Rendiconti* (1889, p. 273) una risposta dello stesso prof. Giudice alla sua questione e, ciò che è più, una risposta affermativa.

Per semplicità prendo a considerare un caso particolarissimo dell'esempio da lui proposto. Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni date nell'intervallo ab, e sia $f(c)$ continua in tutto l'intervallo, $\varphi(x) = f(x)$ dappertutto fuorchè in un punto interno c in cui $\varphi(x) = C \gtrless f(c)$. Le funzioni:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x), \qquad \int_a^x \varphi(x)\,dx = \Phi(x)$$

hanno notoriamente egual valore in tutti i punti dell'intervallo ab, ma esse non sono identiche, perchè nel punto c la derivata di $F(x)$ ha il valore $f(c)$ e quella di $\Phi(x)$ non esiste. Non so davvero come si possa concepire che due (!) funzioni aventi egual valore in tutti i punti non abbiano egual derivata; ciò porterebbe per conseguenza che insieme alle eguaglianze $\Phi(x) = F(x)$, $\Phi(x+h) = F(x+h)$ dovrebbe sussistere la diseguaglianza

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \gtrless \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Ma per suffragare la mia tesi evidentissima con un voto assai autorevole, riporto alcune linee del Dini (*Fondamenti*, § 192):

« . . . l'integrale $\int_a^x f(x)\,dx$ considerato come funzione del suo limite superiore x...
« è tale altresì che nei punti ove $f(x)$ è continua esso ammette sempre una derivata « ordinaria finita e determinata che è appunto $f(x)$, e una particolarità simile si ha « anche nei punti ove $f(x)$ ha di quelle discontinuità che possono togliersi mutando « il valore della funzione, colla sola differenza che in questi punti il valore della de- « rivata anzichè essere eguale al valore della funzione è uguale al valore $f(x+0)$ « o $f(x-0)$ che dovrebbe darsi a $f(x)$ per ristabilire la continuità ». Sicchè nel punto c la derivata di $F(x)$ è $f(c)$, e la derivata di $\Phi(x)$ è $\varphi(c+0)$ o $\varphi(c-0)$, ossia $f(c+0)$ o $f(c-0)$, ossia ancora $f(c)$.

GIUDICE: *Risposta al prof. Vivanti.*

Si dànno infinitesimi ed infiniti di ordine infinitamente piccolo relativamente ad altri e sarebbe sconveniente, non rigoroso, dirli di ordine nullo. Se per probabilità che le parti d'un segmento diviso arbitrariamente in un numero prefissato di parti si intende il limite della probabilità che tali condizioni siano soddisfatte quando le parti debbano avere una massima comune misura, coll'impicciolire di questa indefinitamente, si ha che: La probabilità che le tre parti in cui un segmento è diviso da due suoi punti fissati arbitrariamente siano diseguali e tutte minori della metà del segmento è $\frac{1}{4}$; la probabilità che siano diseguali ed una superi la metà del segmento è $\frac{3}{4}$; ma non mi par giusto dire che tali probabilità siano esattamente $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$: le probabilità che almeno due parti siano eguali tra loro o che una sia metà del segmento sono infinitamente piccole, costanti, in confronto delle precedenti ma perfettamente

paragonabili tra loro; la penultima probabilità è doppia dell'ultima (*). Del resto quando io ho accennato alla distinzione tra funzioni eguali e funzioni identiche (**) ho ritenuto inutili minuziose dichiarazioni perchè non è punto nuova l'idea dell'infinitamente piccolo costante. « *Also existirt das Unendlichkleine wirklich* » (***) il quale appunto conduce a distinguere i valori eguali dai valori identici « *Zwei endliche Grössen, deren Unterschied unendlich klein ist, sind einander gleich* » (****). L'infinitamente piccolo costante può esser accettato per convenienza o respinto per comodo; ma ove fosse accettato, il che richiederebbe certo ancora uno studio accurato e forse difficile, ne seguirebbe naturalmente che: se $f(x)$ è funzione continua identica a $\varphi(x)$ in tutti i punti d'un intervallo fuorchè nel punto c interno al medesimo, non si può dir nulla della derivata di $\int_a^x \varphi(x).\,dx$ nel punto c perchè $\int_a^c \varphi(x).\,dx$ ed $\int_a^c f(x).\,dx$ potrebbero differire di un infinitamente piccolo costante e non si potrebbe trascurare il suo rapporto alla differenza della variabile se questa differenza debba decrescere indefinitamente prendendo non soltanto tutti i valori finiti, come sembrami essersi sempre supposto nei libri d'Analisi e quindi anche in quello pregievolissimo del Dini, ma prendendo pure tutti i valori infinitamente piccoli dell'idealista di Du Bois-Reymond « *Wenn man die (positiv gedachte) Veränderliche x gegen die Null abnehmen lässt, wie dies bei Grenzbetrachtungen vorgeschrieben wird, und man denkt sich x erst alle Stufen der Grössen endlicher Abmessung, wenn man will, jede Stufe durch Unendlichkleines vermehrt oder vermindert, sodann auch alle Stufen des Unendlichkleinen aller Ordnungen durchlaufend, so hat x das positive Grössengebiet erschöpft* » (*****).

Con ciò spero d'esser meglio compreso specialmente dal ch^mo^ Prof. Vivanti che s'è occupato dei tipi ordinati, e dei numeri transfiniti, di G. Cantor e di essermi liberato dei punti ammirativi.

ADUNANZA DEL 9 FEBBRAJO 1890 (Presidenza: M. Gebbia).

Corrispondenza. — La Direzione degli *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* accetta il cambio coi *Rendiconti* del Circolo. — La Società Matematica di Amburgo ringrazia pei tomi I, II e III dei *Rendiconti* inviati dal Circolo in occasione del 200° anniversario della fondazione della Società medesima. — Fra le pubblicazioni non periodiche ricevute in dono, il SEGRETARIO segnala:

1° Il 1° volume delle Opere di G. Lejeune Dirichlet pubblicate dalla R. Accademia delle Scienze di Berlino, per cura del prof. L. Kronecker.

2° Una raccolta di opuscoli, intorno a G. Libri ed una Lettera autografa del

---

(*) Nel *Periodico di Matematica per l'Insegn. secondario* (nov.-dic. 1889) è detto erroneamente che queste probabilità stanno come $\sqrt{3}$ ad 1.

(**) Questi *Rendiconti*, t. II (1888), pp. 94 e 188, ultime linee.

(***) P. Du Bois-Reymond: *Die allgemeine Functionentheorie*, Tübingen, 1882, pag. 72, linea 15. — *Vedi* pure pag. 73, linee 7-18.

(****) l. c., pag. 74, linea 8.

(*****) l. c., pag. 80, linea 10.

Libri indirizzata al colonnello cav. Alfonso Scalia in data di Londra 16 febbrajo 1863; che il Tenente Generale comm. Alfonso Scalia (Palermo) ha regalato alla Biblioteca della Società. Il Circolo delibera di ringraziare.

Ammissione di nuovi soci. — L'ingegnere Antonino Messina, proposto dai soci Gebbia e Guccia, è eletto *socio residente*. — Il dott. Giulio Giuliani (Lucca), proposto dai soci Cerruti e Tonelli, è eletto *socio non residente*.

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI. *Risposta al Prof. Giudice.* [Mantova, 4 febbrajo 1890].

Ritorno un pò più estesamente sopra un punto che ho appena toccato nella mia precedente comunicazione. Si denoti con x una variabile reale, con T l'insieme di tutti i valori reali compresi in un certo intervallo ab, e sia G un gruppo di valori reali riferito univocamente al gruppo T; il gruppo G costituisce una funzione $f(x)$ di x definita in tutto l'intervallo ab. Se Γ è un gruppo della stessa natura di G, esso costituirà un'altra funzione, che dirò $\varphi(x)$, definita nel medesimo intervallo ab; e, se G e Γ sono eguali (cioè se sono eguali gli elementi dei due gruppi che corrispondono ad uno stesso elemento qualsivoglia di T), $f(x)$ e $\varphi(x)$ non saranno che *due nomi dati ad una sola e medesima cosa*. Ciò fa vedere senz'altro, come la questione proposta dal chmo. Prof. Giudice (questi *Rendiconti*, t. II, p. 188), se sieno possibili due funzioni eguali in tutto un intervallo e non identiche, non ha ragione di esistere.

Riguardo poi alla risposta del Prof. Giudice alla mia comunicazione, devo riconoscere che, ammessa l'esistenza dell'infinitesimo costante, e ammessa la distinzione fatta dal Prof. Giudice tra *eguale* e *identico*, egli ha perfettamente ragione asserendo che possono esistere due funzioni eguali e non identiche,—come avrebbe ragione qualora asserisse che possono esistere due cubi eguali e non identici, tali essendo quelli i cui lati differissero di un infinitamente piccolo; ma ognuno vede a che si ridurrebbe con ciò la matematica (*). Rammenterò poi che G. Cantor in un recente lavoro (**) ha dimostrato matematicamente la non esistenza dell'infinitesimo costante.

CASTELNUOVO.—[Torino, 3 febbrajo 1890]. In una comunicazione del sig. Humbert inserita nei Rendiconti di questo Circolo (tomo III, pag. 277 — verbali) si trovano alcune inesattezze, che credo debbano essere rilevate.

L'Autore si occupa di quelle superficie che contengono una serie ∞^1 di curve C punteggiate univocamente; il luogo di un punto di una C che corrisponde ad un punto fissato sopra una delle C, è una curva C'; sulla superficie giacciono ∞^1 curve C'. Ora quando si parla delle relazioni tra la serie delle C' ed il genere delle C (in par-

---

(*) Non permettendomi la ristrettezza dello spazio di trattenermi sulle teorie dell'*idealista* di Du Bois-Reymond, mi limito a citare le obiezioni dell'*empirista* (Du Bois-Reymond, *Die allg. Functionentheorie*, I, p. 101, l. 8 e segg.) e le idee dell'Autore sull'applicazione dei concetti idealistici all'analisi (tutto l'art. 41, e specialmente p. 155, l. 27-30).

(**) *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, t. 91, p. 120-122).

ticolare nel II° teorema) bisogna porre la restrizione che le C non ammettano trasformazioni involutorie in sè stesse; perchè altrimenti può avvenire che ogni C' seghi ciascuna C in due punti coniugati nell'involuzione, nel qual caso il genere di C' può essere diverso dal genere della serie delle C.

Così non è chiaro quanto si riferisce al *gruppo di punti di una curva* nel senso di Nöther; nelle ricerche di Brill e Nöther si parla di *serie di gruppi* (*Gruppenschaar*), parole che hanno un significato preciso, e non di *gruppi* isolati. Ma infine queste sono minuzie che in una redazione più diffusa sarebbero certo state corrette.

Piuttosto non può andare la definizione che il sig. Humbert dà di punto speciale, perchè consta di due parti che si contraddicono; per metterle d'accordo, bisogna dichiarare che le curve o superficie aggiunte di cui si parla, sono quelle che segano sulla curva proposta la *Specialschaar*; in tal senso possono dirsi punti speciali i flessi di una curva piana del quarto ordine; non già i flessi (o i punti sestattici) di una cubica piana, che non si trasportano in punti della stessa natura, quando si fa una trasformazione univoca *generale* della curva. Da questa ultima osservazione vien subito il sospetto che sia inesatto il teorema: *Se una superficie contiene una serie* ∞^1 *di cubiche piane aventi lo stesso modulo, il luogo dei flessi si scinde in nove curve di ugual genere* (e insieme a questo il teorema seguente). Ed infatti si possono dare esempi di superficie, per le quali il teorema non vale. Per mostrarne uno, si considerino nello spazio quattro rette sghembe e, f, g, h, ed in un fascio di piani si pensi un piano fisso σ_1 che seghi le quattro rette in E_1, F_1, G_1, H_1, ed un piano variabile σ che seghi le rette stesse in E, F, G, H.

Poi in σ_1 si descriva una cubica piana C_1 passante per E_1, F_1, G_1, e si stabilisca tra σ e σ_1 la trasformazione quadratica che ha per punti fondamentali E, F, G, e rispettivamente E_1, F_1, G_1, e che fa corrispondere i punti H, H_1. Alla curva C_1 corrisponderà in σ una cubica piana C, i cui flessi *non* corrisponderanno in generale ai flessi di C_1. Quando σ descrive il fascio (restando fissa la C_1), la curva C descrive una superficie, nella quale si trova inoltre una serie ellittica di curve razionali C' (descritte dai punti omologhi ad uno stesso punto di C_1). Ma per ciò che ho osservato, il luogo γ di un flesso di C non può essere una delle curve C'; nè può essere un'altra curva *razionale*, perchè le C' segano su γ una involuzione che sarà ellittica come la serie delle C' (mentre ogni involuzione sopra una curva razionale è razionale). Da tutto ciò può dedursi che al variare di C, i nove flessi descrivono non già nove curve razionali, ma una unica curva non razionale.

Quanto ai caratteri di una superficie contenente i due sistemi di curve C e C', sembra inesatto l'ordine, poichè esso non può esser determinato coi soli caratteri delle C e C' considerati dall'Autore. Invece ritengo esatte le altre formole; anzi la prima che dà il genere della superficie come prodotto dei generi delle curve C e C' è davvero notevole.

Come l'Autore si sarà accorto, essa può venir enunciata così: *La varietà* ∞^2 *delle coppie di punti costituite da un punto di una curva di genere* p *e da un punto di una curva di genere* p', *ha il genere* pp'; sotto questa forma il teorema può forse generalizzarsi senza difficoltà. Quale sarà il genere della varietà costituita dalle coppie di punti di una stessa curva di genere p?

HUMBERT: Je ne puis que féliciter et remercier M. Castelnuovo de son intéressant exemple, qui donne, si l'on y prête un instant de réflexion, une vérification simple de la proposition critiquée. Pour la réponse aux autres observations de détail contenues dans la Note précédente, je renvoie au Mémoire développé qui paraîtra plus tard, et qui pourra, je l'espère, éclaircir tous les doutes de mon jeune confrère.

GUCCIA: Il non lieve errore nel quale è incorso il sig. Castelnuovo, nell'esempio addotto allo scopo d'infirmare il teorema del sig. Humbert, si fa manifesto osservando che, fra due piani σ e σ^*, del fascio (σ), ciascuno dei quali è in corrispondenza quadratica col piano σ_1 (in guisa che alle rette dell'uno o dell'altro corrispondono in σ_1 coniche passanti per E_1, F_1, G_1) havvi, come ognun vede, corrispondenza collineare. Cosicchè, indicando con C e C^* le cubiche di σ e σ^* che corrispondono alla cubica fissa C_1 di σ_1, si ha che ad un flesso di C corrisponde un flesso di C^*. Donde segue che, al variare di σ, il luogo γ di un flesso di C *sarà una delle curve razionali* C' descritte dai punti omologhi ad uno stesso punto di C_1. E però: i nove flessi della curva mobile C descriveranno sulla superficie *nove curve razionali.*

ADUNANZA DEL 23 FEBBRAJO 1890 (Presidenza M. L. Albeggiani).

Corrispondenza. — Il PRESIDENTE partecipa alla Società che il sig. Enrico La Farina, con lettera del 31 dicembre 1889, si è dimesso da Socio residente del Circolo. — Il Socio Certo presenta le dimissioni del sig. Giacomo Del Vecchio da socio non residente del Circolo.

Affari interni. — Esposizione ed approvazione del Conto consuntivo dell'esercizio 1889 e del Bilancio di previsione per l'esercizio 1890.—Ai sensi dell'art. 10 dello Statuto i signori ing. F. P. D'Angelo e prof. F. Maggiacomo sono radiati dall'elenco dei soci.

Memorie e Comunicazioni.

NOETHER: *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier.*

LEBON: *Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche.*

MARTINETTI: *Sul genere delle curve* Ω *nelle involuzioni piane di classe qualunque.* (*Nota II*).

CASTELNUOVO.—[Torino, 13 febbrajo 1890]. L'esempio addotto nella mia Comunicazione presentata alla seduta del 9 febbrajo non regge; ma può venir sostituito da quest'altro.

Consideriamo la rigata del quarto ordine con due direttrici doppie; le generatrici congiunte con un punto *esterno* alla rigata S dànno piani secanti la superficie lungo ∞^1 cubiche C riferite univocamente dai raggi della rigata. Ora di queste cubiche mai due sono in corrispondenza collineare; perchè se due cubiche C si corrispondessero in una collineazione, la retta intersezione dei loro piani segherebbe le due cubiche, oltre che in una coppia di punti comuni ad esse, in due punti omologhi (perchè allineati con coppie di punti omologhi), e quindi (la retta stessa ed) il punto S dovrebbe appartener alla rigata, contro l'ipotesi.

Ne viene che in due cubiche C mai un flesso dell'una può corrispondere ad un flesso dell'altra (nella nominata corrispondenza), ossia che sopra una qualunque generatrice della rigata sta il flesso di *una sola* tra le ∞^1 cubiche C.

Segue da ciò che la curva dei nove flessi non può spezzarsi in nove generatrici, nè può spezzarsi in $n > 1$ altre curve, perchè in tal caso almeno n flessi di cubiche C dovrebbero trovarsi sopra ciascuna generatrice. La curva dei flessi è adunque *unica*.

Un altro esempio è offerto dalla superficie generata da una cubica piana simmetrica rispetto ad un asse, quando la si faccia ruotare intorno a quest'asse. I nove flessi allora descrivono non già nove curve, ma quattro cerchi ed una retta (all'infinito).

Questi esempi possono mostrare che in generale i nove flessi descrivono una *unica* curva, la quale solo per famiglie particolari di superficie può spezzarsi.

HUMBERT. — Sans discuter les deux exemples précédents, je vais donner en quelques mots la démonstration de mon théorème sur les cubiques planes, pour couper court à toute nouvelle tentative de M. Castelnuovo.

Les coordonnées des points d'une cubique plane peuvent toujours se mettre sous la forme:

$$\rho x_i = a_i \wp' u + b_i \wp u + c_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

les a, b, c étant des constantes. Le module est déterminé quand les périodes ω, ω' de $\wp u$ sont connues, et les équations (1) représentent toutes les cubiques de ce module.

Les points d'inflexion correspondent aux valeurs de l'argument u de la forme $m\frac{\omega}{3} + m'\frac{\omega'}{3}$ $(m, m' = 0, 1, 2)$.

Si la cubique (1), le module restant fixe, varie dans l'espace en décrivant une surface algébrique, S, les douze quantités a, b, c sont liées par dix relations algébriques homogènes,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots f_{10} = 0.$$

Le lieu d'un point de la cubique qui correspond à un argument donné, u, est représenté par les équations (1), où u est une constante, et les a, b, c, des variables liées par les dix relations $f = 0$: ce lieu est donc une courbe algébrique, C'. Pour un autre argument, u_0, on aura une autre courbe, C'_0, différente de C', en général.

Par suite les neuf points d'inflexion de la cubique, qui correspondent à neuf valeurs *fixes* et différentes de l'argument décrivent neuf courbes C', dont la méthode précédente donne *séparément* les équations. Il peut évidemment arriver que plusieurs de ces équations, généralement distinctes, représentent la même courbe, mais ces cas spéciaux n'infirment nullement le théorème: dit-on qu'une équation de degré m a moins de m racines quand deux ou plusieurs racines deviennent égales?

ADUNANZA DEL 9 MARZO 1890 (Presidenza M. L. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

GUCCIA: *Sul genere delle curve algebriche gobbe.*

G.B.G. M.L.A.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

LE CUI SEZIONI PIANE SONO CURVE IPERELLITTICHE;

Nota di Guido Castelnuovo, in Torino.

Adunanza del 26 gennajo 1890.

Le proprietà invariantive per trasformazioni univoche di una curva piana sono certo legate da notevoli relazioni colle proprietà delle superficie che hanno quella curva per sezione generica. Ma su queste relazioni ben poco si conosce finora: ed i teoremi in cui si parla di superficie a sezioni di dato genere riguardano quasi tutti il caso del genere o.

Recentemente il sig. Del Pezzo annunciò [Verbali dei *Rendiconti del Circolo Matematico*, t. II (1888), p. 84] di esser giunto al teorema: *Ogni superficie non rigata dell'ordine m, la cui sezione è del genere $p \leq m - 2$, si può rappresentare sopra un piano.* Ci sembra però che questo enunciato debba andar modificato in qualche punto; poichè esistono superficie (ad es. la superficie del sesto ordine, con curva doppia del sesto ordine e genere 4), che pur soddisfacendo alle premesse, non sono rappresentabili sul piano, perchè hanno il genere superiore a zero. Sono certo di genere zero o inferiore le superficie che hanno per sezioni curve non speciali; ma anche tra queste (pure escludendo le rigate) si trovano superficie non rappresentabili sul piano. Nel presente lavoro mi limto a provare come (con qualche restrizione) una superficie a sezioni iperellittiche (in particolare razionali od ellittiche) sia razionale (cioè rife-

ribile univocamente al piano). In altra Nota tratterò l'analoga questione per le superficie a sezioni di genere 3.

Alle superficie a sezioni razionali dedico poche righe essendo l'argomento ormai esaurito.

Dimostro poi che le superficie a sezioni ellittiche sono razionali, e perciò appartengono tutte a tipi già noti.

Invece, le superficie a sezioni iperellittiche costituiscono un campo quasi inesplorato e ricco di risultati; ad esse quindi è dedicata la maggior parte di questa Nota. Risolta la questione della *rappresentabilità*, cerco le principali proprietà delle superficie, e dò un modo per classificarle: studio anche i sistemi minimi di curve che possono rappresentarle sul piano, e giungo ad un teorema sui sistemi lineari di curve iperellittiche, il quale dà un nuovo esempio dei vantaggi che le questioni sui sistemi di curve piane risentono dallo studio di certe superficie.

Debbo infine avvertire che le restrizioni di cui si parla al n° 1, sono *sufficienti* per la validità dei teoremi enunciati; se però siano necessarie o superflue, è una domanda a cui oggi non so rispondere.

1. Nello spazio a tre dimensioni sia data una superficie F^n irriduttibile d'ordine n; indichi π il genere della sezione della superficie ottenuta con un piano generale. La superficie potrà avere curve e punti singolari.

Se le singolarità presentate da F^n sono ordinarie (curve multiple secondo i coi piani tangenti distinti in ogni loro punto, punti multipli ordinari secondo l), per *superficie aggiunta* ad F^n si intende ogni superficie che passi $(i-1)$ volte per ogni curva i-upla, $(l-2)$ volte per ogni punto l-uplo di F^n.

Indicando con Φ^μ una superficie d'ordine μ aggiunta ad F^n, si verificano, come è noto, le seguenti proprietà:

1) Un piano generale sega F^n e Φ^μ in una curva d'ordine n ed in una curva d'ordine μ *aggiunta* alla prima.

2) Le superficie aggiunte di un dato ordine formano un sistema lineare determinato esclusivamente dalle singolarità di F^n. Una Φ^μ con una superficie arbitraria d'ordine μ' costituisce una superficie aggiunta d'ordine $\mu+\mu'$.

3) Per μ superiore a un certo limite λ indichi A_μ il numero delle

superficie aggiunte Φ^μ linearmente indipendenti; si ha la relazione:

$$(\alpha) \qquad A_{\mu+1} - A_\mu = \binom{\mu+3}{2} - \binom{n-1}{2} + \pi. \text{ (*)}$$

Per tutti i valori di $\mu \leq \lambda$ si attribuisca ad A_μ tal valore che la (α) continui a sussistere qualunque sia μ. Così, ad esempio, resta ben definito il simbolo A_{n-4}.

4) Ora la superficie $F^{n'}$ sia riferita univocamente ad F^n; come si è calcolato A_{n-4} per F^n, così si calcoli $A_{n'-4}$ per $F^{n'}$: si troverà

$$A_{n-4} = A_{n'-4}.$$

Il numero A_{n-4} che (nel senso ora esposto) si mantiene invariato nelle trasformazioni univoche di una superficie, si chiama *genere* (*Flächengeschlecht*) della superficie e si suole indicare con p;

$$A_{n-4} = p.$$

Se $p > 0$, A_{n-4} dà, in generale, il numero delle superficie Φ^{n-4} linearmente indipendenti, tanto che possiamo ritenere $\lambda = n - 5$.

Se invece $p = 0$, ci basta supporre $\lambda = n - 4$ (escludendo, se esistono, le superficie di genere zero per cui si deve prender $\lambda > n - 4$) (**).

(*) Per dimostrare questa relazione si noti che per la formola di postulazione di Nöther (*Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di Matematica, V$_2$) si ha

$$A_\mu = \binom{\mu+3}{3} - \left\{ \mu \sum_i \frac{1}{2} i(i-1) m_i + \dots \right\}$$

dove m_i è l'ordine della curva multipla secondo i di F^n ed i puntini sostituiscono termini indipendenti dall'ordine μ della superficie aggiunta. Ponendo $\mu + 1$ al posto di μ e facendo la differenza, si ottiene

$$A_{\mu+1} - A_\mu = \binom{\mu+3}{2} - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1) m_i,$$

donde subito la (α).

(**) Per le proprietà enunciate in questo paragrafo 4) *vedi* la citata Memoria di Nöther, §§ 14, 15, ed anche il § 12 del lavoro: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* dello stesso autore (Math. Annalen, VIII).

In conseguenza di ciò, come casi particolari della (α), abbiamo che per $p \geqq 0$ le relazioni

$$(\beta) \qquad \begin{cases} A_{n-3} = p + \pi \\ A_{n-2} = p + 2\pi + n - 1 \end{cases}$$

dànno realmente i numeri delle Φ^{n-3}, Φ^{n-2} linearmente indipendenti.

I teoremi che si trovano in questa Nota si riferiscono, non solo a superficie con singolarità ordinarie, ma più in generale *a tutte le superficie per le quali il concetto di superficie aggiunta possa stabilirsi in guisa da rimaner soddisfatte le condizioni* 1), 2), 3), 4). *Ogni altra superficie deve ritenersi esclusa in questo lavoro.*

2. *Una superficie dello spazio a r dimensioni, la quale sia segata dagli spazi a $r - 1$ dimensioni in curve non speciali* (*), *ha il genere minore od uguale a zero.*

Se $r > 3$ proiettiamo la superficie, da uno spazio S_{r-4} che non la incontri, in uno spazio a tre dimensioni; otterremo una superficie F^n dell'ordine primitivo, sia n, a sezioni piane non speciali. Ora se il genere di F^n fosse superiore a zero, esisterebbe almeno una superficie aggiunta d'ordine $n - 4$, la quale segherebbe un piano in una curva d'ordine $n - 4$ aggiunta all'intersezione C^n di F^n con quel piano. Ma allora i gruppi di n punti segati su C^n dalle rette del piano, potrebbero ottenersi come intersezione (parziale) di C^n e di curve aggiunte (degeneri) d'ordine $n - 3$; cioè C^n sarebbe una curva speciale, contro l'ipotesi fatta.

(*) Rammento che una curva di S_r si dice (non) speciale, quando gli S_{r-1} di S_r la segano in una involuzione (non) speciale (*Specialschaar* secondo Brill e Nöther). Il teorema ora enunciato è caso particolare del seguente che non adopero, e di cui per brevità ometto la dimostrazione (fondata sulla *Extension du théorème de Riemann-Roch* di Nöther — Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 1886): *Una superficie che contenga una doppia infinità razionale di curve, delle quali ciascuna sia segata dalle rimanenti in una involuzione non speciale, ha al massimo il genere zero.*

Per ciò che segue dobbiamo distinguere tre casi, a seconda che le sezioni della superficie che si considera sono razionali, ellittiche, od iperellittiche di genere superiore ad 1; (nel seguito per brevità dicendo curve iperellittiche intenderemo che il genere sia superiore ad 1).

I. — Superficie a sezioni razionali.

3. Risulta da un teorema di Nöther (*) che tutte (senza eccezioni) le superficie a sezioni razionali sono razionali; e dai lavori di Picard (**) e Guccia (***) risulta che tali superficie sono le rigate razionali e la superficie di Steiner, soltanto. In vari modi, tutti semplici, si può dimostrare che *una superficie a sezioni razionali d'ordine n non può appartenere ad uno spazio superiore ad S_{n+1}, e se appartiene ad uno spazio inferiore è proiezione di una superficie dello stesso ordine di S_{n+1}* (****). Anche la questione dei sistemi lineari che rappresentano sul piano una superficie a sezioni razionali, può ritenersi completamente esaurita.

II. — Superficie a sezioni ellittiche.

4. Per le superficie considerate in questo e nei seguenti paragrafi dobbiamo aggiungere un'altra restrizione a quelle già date al n° 1. Dobbiamo cioè supporre *che le superficie abbiano il genere uguale a zero*; con ciò vengono escluse ad es. le rigate ellittiche ed iperellittiche che hanno il genere negativo, e non possono riferirsi univocamente al piano.

Sia F^n una superficie del nostro spazio di genere $p = 0$, a sezioni piane ellittiche; poichè il genere π della sezione piana vale 1, le relazioni (β) diventano

$$A_{n-3} = 1 ,$$

$$A_{n-2} = n + 1 ,$$

(*) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Mathem. Annalen, III).

(**) Journal für die Math., t. C.

(***) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali* (Rendic. Circolo Matem., t. I).

(****) Per le superficie d'ordine n di S_{n+1}, veggasi Del Pezzo (Rendic. Acc. di Napoli, 1885).

e ci dicono che esiste una sola superficie aggiunta Φ^{n-3} ed ∞^n superficie aggiunte Φ^{n-2}. Per una nota proprietà, una curva piana ellittica d'ordine n non è segata dalla curva aggiunta d'ordine $n - 3$ in altri punti, all'infuori dei punti multipli. Quindi Φ^{n-3} non segherà F^n che nelle curve e nei punti singolari di questa (dal che segue che F^n non possiede punti di molteplicità superiore a 2 fuori delle linee multiple). Invece le ∞^n Φ^{n-2} segano F^n, oltre che nelle curve multiple, in ∞^n curve (*), tra le quali si trovano le ∞^3 sezioni piane di F^n; e le ∞^{n-1} curve del sistema che passano per un punto arbitrario di F^n non devono in conseguenza passare per qualche altro punto di F^n determinato dal primo, perchè ciò ad es. non accade per le sezioni piane di F^n.

Ciò posto, si riferiscano univocamente le ∞^n Φ^{n-2} agli S_{n-1} di uno spazio S_n; ai punti di F^n (come giacenti in ∞^{n-1} Φ^{n-2}) corrispondono univocamente i punti di una certa superficie F' di S_n: alla Φ^{n-3} che appartiene a ∞^3 Φ^{n-2} corrisponderà uno spazio S_{n-4}, dal quale F' viene proiettata in F^n. Ora S_{n-4} non può aver punti comuni con F'; perchè se tagliasse F' in un numero sia finito, sia infinito di punti, ogni S_{n-1} per S_{n-4} segherebbe F' in una curva che conterrebbe qualcuno di questi punti, e quindi altrettanti punti (non singolari) dovrebbero esser comuni ad una sezione piana di F^n ed a Φ^{n-3}, il che, come abbiamo visto, non può essere. Dal fatto che F' è proiettata da un S_{n-4}, che non la sega, in una superficie d'ordine n, si conchiude che anche F' è d'ordine n. Ma per un teorema di Del Pezzo (**) le superficie d'ordine n appartenenti ad S_n sono tutte razionali; dunque F', ed in conseguenza anche F^n, è razionale, come si voleva dimostrare.

Ogni superficie le cui sezioni (piane o spaziali) *siano curve ellittiche è razionale. Se n è il suo ordine, la superficie non può appartenere ad uno spazio superiore ad S_n, e se appartiene ad uno spazio inferiore, essa è proiezione di una superficie dello stesso ordine appartenente ad S_n.*

(*) Il caso che le curve si riducessero a ∞^{n-1} per il fatto che ciascuna si trovasse in ∞^1 Φ^{n-2}, porterebbe di conseguenza lo spezzarsi di F^n in una Φ^{n-2} ed in una quadrica.

(**) *Sulle superficie dell' n^o ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rendic. Circolo Matem., t. I).

Poichè le F^n di S_n, se n supera 9, sono rigate razionali, segue che *Una superficie a sezioni ellittiche non può avere l'ordine superiore a 9.*

Ogni superficie a sezioni ellittiche d'ordine n può rappresentarsi sul piano mediante un sistema di cubiche con $9 - n$ punti base semplici, fatta eccezione per una certa superficie dell'ottavo ordine che viene rappresentata dalle curve di quarto ordine con due punti base doppi (*).

III. — Superficie a sezioni iperellittiche.

5. Come è noto, una curva iperellittica contiene una involuzione razionale di coppie di punti; e se la curva è piana d'ordine n e di genere π, essa è segata da ogni curva aggiunta d'ordine $n - 3$ in $\pi - 1$ coppie dell'involuzione. Diremo *coniugati* due punti formanti una coppia dell'involuzione; due punti tali che ogni curva aggiunta d'ordine $n - 3$ passante per uno di essi contenga anche l'altro, sono coniugati, e viceversa.

Sia F^n una superficie del nostro spazio, ed il genere π delle sezioni piane sia anzitutto uguale a 2. Allora, poichè

$$A_{n-3} = 2,$$

esistono ∞^1 superficie aggiunte Φ^{n-3}, e ciascuna di queste sega F^n (oltre che nelle curve singolari) in una curva che ha due punti sopra ogni piano, quindi in una conica (essendo escluse le F^n rigate). Ma allora esiste un fascio di superficie seganti su F^n un fascio di curve razionali (ogni superficie determinando, una sola curva), e tanto basta per conchiudere, in virtù di un teorema già citato del sig. Nöther (**), che F^n è razionale.

Sia invece $\pi > 2$, e tuttavia siano iperellittiche le sezioni piane di F^n. Questa volta è

$$A_{n-3} = \pi;$$

(*) Quanto ai sistemi lineari di curve ellittiche vedi il citato lavoro di Del Pezzo e la Nota di Guccia: *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche* (Rendic. Circolo Mat., t. I).

(**) Math. Annalen, III.

sono quindi $\infty^{\pi-1}$ le superficie aggiunte Φ^{n-3}. Se P è un punto qualunque di F^n, tutte le $\infty^{\pi-2}$ Φ^{n-3} passanti per P passano per i punti coniugati a P nelle sezioni di F^n ottenute con piani passanti per P. I punti coniugati a P costituiscono adunque una curva γ per la quale passano $\infty^{\pi-2}$ Φ^{n-3}; ed ogni Φ^{n-3} contenente un punto di γ, contiene tutta la curva γ. E due punti arbitrari di γ, giacendo su tutte le $\infty^{\pi-2}$ Φ^{n-3} che passano per uno di essi, sono coniugati in ogni sezione di F^n ottenuta con un piano condotto per essi. Ma poichè un punto di γ non può avere che un solo coniugato in una sezione piana di F^n, segue che γ è segata da un piano arbitrario in una coppia di punti, che γ è una conica (passante per P). Per conseguenza la intersezione di una Φ^{n-3} con F^n che è una curva d'ordine $2\pi-2$ (oltre alle curve singolari), deve scindersi in $\pi-1$ coniche. La F^n contiene infinite coniche, ed ogni Φ^{n-3} che passi per un punto di una di queste coniche, passa per tutta la conica. Ne viene che tutte le infinite coniche possono esser generate dalle ∞^1 Φ^{n-3} che passano per ($\pi-2$ punti indipendenti di F^n e quindi per) $\pi-2$ coniche del sistema; ogni Φ^{n-3} del fascio determina una conica. Ma allora per il teorema di Nöther, che ci ha già servito, la F^n è razionale.

Una superficie a sezioni (piane o spaziali) *iperellittiche è razionale. Se il genere della curva sezione supera* 1, *la superficie contiene una semplice infinità razionale di coniche, tale che per ogni punto della superficie passa una sola conica.* Le coniche determinano in ogni sezione spaziale le coppie di punti coniugati.

Una curva iperellittica d'ordine n e genere π non può appartenere ad uno spazio superiore ad $S_{n-\pi}$; segue:

Una superficie a sezioni iperellittiche d'ordine n e genere π non può appartenere ad uno spazio superiore a $S_{n-\pi+1}$, e se appartiene ad uno spazio inferiore è proiezione di una superficie (normale) *dello stesso ordine di $S_{n-\pi+1}$*. La seconda parte dall'enunciato è conseguenza di un teorema del sig. Segre (*).

La superficie normale F^n di $S_{n-\pi+1}$ a sezioni iperellittiche di ge-

(*) *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche* (Rendic. Circolo Matem., t. I, p. 217).

nere π, contiene essa pure ∞^1 coniche, i cui piani formano una varietà V razionale normale (*) (e per conseguenza) d'ordine $n - \pi - 1$. Proiettando la F^n da uno spazio S_r che non seghi F^n ma incontri in punti $i (\geq 0)$ piani di V, si ottiene in $S_{n-\pi-r}$ una superficie d'ordine n per la quale i piani delle ∞^1 coniche formano una varietà d'ordine $n - \pi - i - 1$; ed i di queste coniche sono sostituite da rette doppie.

Quindi: *I piani delle* ∞^1 *coniche giacenti in una superficie a sezioni iperellittiche d'ordine* n *e genere* π *formano una varietà* (inviluppo per S_3) *di ordine* (classe) *non superiore a* $n - \pi - 1$; *se però quest'ordine è inferiore a* $n - \pi - 1$ *di* i *unità,* i *tra le* ∞^1 *coniche sono sostituite da rette doppie.*

Nella Memoria citata di Nöther (Math. Annalen, III), si trova dimostrato che una superficie la quale contenga un fascio razionale di curve razionali può rappresentarsi sul piano in guisa, che alle curve razionali del fascio corrispondano rette di un fascio.

Quindi: *Una superficie a sezioni iperellittiche può rappresentarsi sul piano in guisa che alle sezioni* (piane o spaziali) *della superficie corrispondano curve d'un certo ordine* ν *aventi in comune un punto multiplo secondo* $\nu - 2$, *e forse altri punti base* (**).

Il sistema lineare piano di curve d'ordine ν non abbia punti base semplici, ma possegga [oltre al punto $(\nu - 2)$-uplo] d punti doppi base, e sia determinato dai punti base. Allora i caratteri della superficie sono

$$n = 4(\nu - 1 - d)$$

$$\pi = \nu - 2 - d\,;$$

ed

$$r = n - \pi + 1 = 3(\nu - d) - 1$$

(*) La varietà è normale, perchè altrimenti essa (e quindi anche F^n), sarebbe proiezione di una varietà (superficie) dello stesso ordine di uno spazio superiore.

(**) Da ciò: *Un sistema lineare di curve piane iperellittiche, nel quale il passaggio di una curva per un punto arbitrario non porti di conseguenza il passaggio per altri punti determinati dal primo,* (e perciò basta che il numero delle intersezioni variabili superi il doppio del genere), *può ridursi mediante una trasformazione birazionale ad un sistema di curve di un certo ordine* ν *aventi in comune un punto multiplo secondo* $\nu - 2$ (e forse altri punti base semplici e doppi).

dà il numero delle dimensioni dello spazio a cui appartiene la superficie; si ha subito

$$n = 4\pi + 4, \qquad r = 3\pi + 5.$$

Una superficie a sezione iperellittiche di genere π ha al massimo l'ordine $4\pi + 4$. Ogni superficie a sezioni iperellittiche di genere π d'ordine $n < 4\pi + 4$ può ottenersi da una superficie d'ordine $4\pi + 4$ di $S_{3\pi+5}$ mediante proiezione da $4\pi + 4 - n$ suoi punti, e forse da altri punti esterni; perchè la rappresentazione piana della F^n si ottiene imponendo alle curve piane C' il passaggio per $4\pi + 4 - n$ punti base semplici.

La superficie $F^{4\pi+4}$ di $S_{3\pi+5}$ non contiene coniche degeneri; se la si proietta da un suo punto, nella superficie proiezione si presentano due rette, la traccia del piano tangente nel punto, e la traccia del piano della conica passante per il punto; e le due rette sostituiscono una delle ∞^1 coniche. Dunque:

In una superficie a sezioni iperellittiche d'ordine n e genere π, in generale $4\pi + 4 - n$ delle ∞^1 coniche degenerano in coppie di rette. (Il numero delle coppie di rette è minore se i centri di proiezione non giacciono tutti su coniche distinte, ma in tal caso alcune delle coppie di rette hanno per centri punti che sono doppi per la superficie).

6. Studieremo in fine i vari tipi che presentano le superficie a sezioni iperellittiche, limitandoci a quelle superficie normali che per sezioni di un dato genere π hanno il massimo ordine $4\pi + 4$; cioè alle $F^{4\pi+4}$ di $S_{3\pi+5}$. Se chiamiamo *curva direttrice* di $F^{4\pi+4}$ ogni curva che seghi ciascuna delle ∞^1 coniche in un sol punto, le $F^{4\pi+4}$ possono classificarsi (come le rigate) a seconda delle direttrici *minime* (d'ordine più basso) che esse contengono.

I piani delle ∞^1 coniche non possono passare per una stessa retta (perchè da ciò seguirebbe lo spezzarsi di ciascuna conica in questa retta ed in un'altra); e se hanno un punto comune, questo punto è comune a tutte le coniche (*). Eccettuato per il momento questo caso, uno spazio

(*) Ciò apparisce, quando si noti che una curva d'ordine $4\pi + 4$ non può giacere sopra un cono a generatrici rettilinee d'ordine $3\pi + 3$ senza passare per il vertice del cono; e in tal caso la curva incontra ancora ciascuna generatrice in un sol punto.

$S_{3\pi+4}$ contenente una conica di $F^{4\pi+4}$ sega la superficie in una curva iperellittica d'ordine $4\pi + 2$, che giace in una rigata razionale d'ordine $3\pi + 2$ ed appartiene ad $S_{3\pi+3}$; il genere della curva sarà quindi $\pi - 1$; la curva sega ciascuna delle coniche in coppie di punti. Ne segue che la proiezione di $F^{4\pi+4}$ dal piano di una sua conica è una superficie $F^{4\pi}$ di $S_{3\pi+1}$, avente per sezioni curve iperellittiche di genere $\pi - 1$; è ancora una superficie normale d'ordine massimo. Una curva d'ordine m direttrice di $F^{4\pi+4}$, si proietta in una curva d'ordine $m - 1$ direttrice di $F^{4\pi}$.

Reciprocamente, se esiste in $S_{3\pi+1}$ una $F^{4\pi}$ con ∞^1 coniche e una curva direttrice d'ordine $m - 1$, costruendo in $S_{3\pi+5}$ una varietà di piani V' che proiettata da uno dei suoi elementi dia la varietà dei piani V delle ∞^1 coniche, si può riguardare la $F^{4\pi}$ come proiezione da un piano, di una $F^{4\pi+4}$ le cui coniche stiano nei piani di V'; alla curva d'ordine $m - 1$ di $F^{4\pi}$ corrisponde in $F^{4\pi+4}$ una curva la quale seca ogni conica (quindi anche il piano di proiezione) in un sol punto; ed è per conseguenza d'ordine m (*). In particolare, se $F^{4\pi+4}$ contiene una retta semplice (la superficie non può avere curve doppie) che seghi ogni conica, la $F^{4\pi}$ conterrà un punto comune a tutte le sue coniche; e reciprocamente.

Escluso questo caso si potrà proiettare $F^{4\pi}$ dal piano di una sua conica, e si otterrà una $F^{4\pi-4}$ di $S_{3\pi-1}$, la quale avrà una curva direttrice d'ordine $m - 2$ corrispondente alla curva d'ordine m di $F^{4\pi+4}$; e così via. Continuando abbastanza si dovrà arrivare necessariamente ad una delle seguenti superficie:

1) Superficie a sezioni razionali del quarto ordine di S_5, contenente un fascio di coniche non aventi punti comuni; per conseguenza questa superficie è la rigata razionale normale di S_5.

2) Superficie d'ordine $4(\pi - \mu + 1)$ di $S_{3(\pi-\mu)+5}$ a sezioni del

(*) Allo stesso risultato si può giungere considerando la rappresentazione piana di $F^{4\pi}$ mediante un sistema di curve d'ordine $\nu - 1$ aventi in comune un punto ω multiplo secondo $\nu - 3$ (e forse altre singolarità); e insieme a questo sistema il sistema delle curve d'ordine ν che si comportano nello stesso modo nei punti base, ma che hanno un punto multiplo secondo $\nu - 2$ in ω.

genere $\pi - \mu$ (dove può esser $\mu = 0, 1, \ldots \pi$) contenente un fascio di coniche passanti per uno stesso punto.

Così sono contemplati tutti i casi possibili.

Una superficie $F^{4\pi+4}$ di $S_{3\pi+5}$ che col procedimento ora indicato conduca alla 1) si dirà di *prima specie*; se invece la $F^{4\pi+4}$ conduce alla 2) si dirà di *seconda specie del gruppo* μ.

7. *Superficie della 1ª specie.* Alle ∞^1 rette della rigata razionale normale di S_5 corrispondono in $F^{4\pi+4}$ ∞^1 *curve razionali direttrici d'ordine* $\pi + 1$ non aventi punti comuni; queste sono le curve direttrici *d'ordine minimo* della superficie (e appartengono al sistema delle ∞^2 direttrici minime che in tal caso possiede la varietà dei piani delle coniche). Alle ∞^3 cubiche sghembe della rigata, secanti ciascuna conica in un punto, corrispondono ∞^3 *curve direttrici d'ordine* $\pi + 3$ di $F^{4\pi+4}$; queste curve si segano a due a due in coppie di punti; per tre punti arbitrari di $F^{4\pi+4}$ passa una sola di queste curve (*).

Ciascuna direttrice minima di $F^{4\pi+4}$ è segata da ciascuna curva d'ordine $\pi + 3$ in un punto. Le ∞^2 curve d'ordine $\pi + 3$ passanti per un punto costituiscono una rete omaloidica che riferita al piano rigato conduce alla *rappresentazione di ordine minimo* di una superficie $F^{4\pi+4}$ della 1ª specie; mediante *curve d'ordine* $\pi + 3$ *aventi in comune un punto multiplo secondo* $\pi + 1$ *ordinario, ed inoltre un punto base doppio.*

8. *Superficie di seconda specie.* La $F^{4\pi+4}$ da un numero sufficiente di coniche venga proiettata in una superficie d'ordine $4(\pi - \mu + 1)$ di $S_{3(\pi-\mu)+5}$ a sezioni del genere $\pi - \mu$, con ∞^1 coniche passanti per un punto O. Per semplicità di scrittura poniamo $\pi' = \pi - \mu$.

Intanto, poichè la $F^{4\pi'+4}$ ha per direttrice minima il punto O, la $F^{4\pi+4}$ avrà una sola direttrice minima d'ordine μ, (la quale sarà pure direttrice minima per la varietà dei piani delle coniche).

(*) Per le proprietà delle rigate e delle varietà di piani razionali qui adoperate veggasi Segre: *Sulle rigate razionali* ecc. e *Sulle varietà normali a tre dimensioni* ecc. (Atti Acc. di Torino, vol. XIX-XXI).

Proiettiamo ora la $F^{4\pi'+4}$ da O; otteniamo in $S_{3\pi'+4}$ una rigata razionale $\Gamma^{3\pi'+3}$ d'ordine $3\pi' + 3$, le cui generatrici sono proiezioni delle ∞^1 coniche. Segue da ciò che il punto O è multiplo secondo $4\pi' + 4 - (3\pi' + 3) = \pi' + 1$ per $F^{4\pi'+4}$; quindi che le tangenti alle coniche in O formano un cono d'ordine $\pi' + 1$, al quale corrisponde una curva d'ordine $\pi' + 1$ sulla rigata $\Gamma^{3\pi'+3}$; e questa è la direttrice minima della rigata. Le direttrici che, dopo questa, hanno l'ordine più basso sulla rigata sono $\infty^{\pi'+2}$ curve d'ordine $2\pi' + 2$, una sola delle quali passa per $\pi' + 2$ punti della rigata: due tali curve si segano in $\pi' + 1$ punti, mentre la direttrice minima non è tagliata da esse.

Alle $\infty^{\pi'+2}$ curve corrispondono curve dello stesso ordine e colle stesse proprietà in $F^{4\pi'+4}$, e corrispondono finalmente su $F^{4\pi+4}$ $\infty^{\pi-\mu+2}$ curve direttrici d'ordine $2\pi - \mu + 2$, che sono le direttrici d'ordine più basso, dopo la minima. Le ∞^2 curve d'ordine $2\pi - \mu + 2$ passanti per $\pi - \mu$ punti si segano in un punto variabile, e costituiscono una rete omaloide che riferita al piano rigato, conduce alla rappresentazione d'ordine minimo. Dunque:

Una superficie $F^{4\pi+4}$ di seconda specie e del gruppo μ ha una sola direttrice minima d'ordine μ; dopo questa le direttrici d'ordine più basso sono $\infty^{\pi-\mu+2}$ curve d'ordine $2\pi - \mu + 2$, ciascuna individuata da $\pi - \mu + 2$ punti; ciascuna curva del sistema sega un'altra curva del sistema in $\pi - \mu + 1$ punti, mentre non sega la direttrice minima.

La superficie può rapresentarsi sul piano mediante le curve d'ordine $2\pi - \mu + 2$ che hanno per base un punto multiplo secondo $2\pi - \mu$, a cui sono infinitamente vicini $\pi - \mu$ punti doppi.

Per giustificare l'ultima proposizione si noti anzitutto che quando si proietta la $F^{4\pi'+4}$ da O sopra la rigata $\Gamma^{3\pi'+3}$ di $S_{3\pi'+4}$, alle sezioni spaziali della superficie corrispondono sulla rigata curve γ d'ordine $4\pi' + 4$ secanti due volte ogni generatrice. Se ora si proietta sopra un piano la rigata da un $S_{3\pi'+1}$ passante per $\pi' + 1$ generatrici e per π' punti della rigata (scelti ad arbitrio), le sezioni spaziali della rigata si proiettano in curve d'ordine $2\pi' + 2$, con un punto fisso ω multiplo secondo $2\pi' + 1$, in cui π' delle tangenti (imagini dei π' centri di proiezione) sono fisse; mentre le curve γ d'ordine $4\pi' + 4$ vengono proiettate in curve γ' d'ordine $2\pi' + 2$ col punto ω multiplo secondo $2\pi'$ e π' punti doppi infi-

nitamente vicini ad ω sulle π' tangenti (punti doppi che rappresentano le coppie di punti in cui le γ sono segate dalle generatrici passanti per i centri di proiezione). Il sistema delle curve γ' rappresenta la $F^{4\pi'+4}$; così l'ultimo teorema è dimostrato per $\mu = 0$.

Per dimostrarlo quando $\mu > 0$, basta tener conto della nota al § 6, che insegna a costruire il sistema rappresentativo di una superficie di un gruppo μ, dato il sistema rappresentativo di una superficie del gruppo $\mu - 1$.

9. Alcuni degli ultimi risultati possono enunciarsi senza nominare le superficie studiate nei precedenti paragrafi, riferendoli invece ai sistemi che le rappresentano sul piano (*). Si ha così:

(*) A questo proposito il sig. Segre mi prega d'inserire qui le seguenti sue parole:

« Poichè nel tuo lavoro hai occasione di valerti di qualcuna delle considerazioni contenute nella mia Nota *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* del 1° vol. di questi Rendiconti, permetti che io ne tragga occasione per aggiungervi qualche breve osservazione che, con maggiori sviluppi, avrei voluto già da lungo tempo far seguire a quella Nota.

« In sostanza essa si basava principalmente (oltre che sull'applicazione ai sistemi lineari delle proposizioni relative alla *geometria su di una curva* ed in particolare di quelle di Brill e Nöther) sulla considerazione di un sistema lineare ∞^k ($k > 1$) di curve piane di genere p e con D intersezioni variabili come rappresentativo di una superficie d'ordine D di S_k a sezioni spaziali di genere p: ove il sistema lineare sia tale che il passaggio delle sue curve per un punto variabile tragga con se il passaggio per altri $\mu - 1$, quella superficie si ridurrà ad una d'ordine D: μ da contarsi μ volte, sì che a ciascun suo punto ne corrispondono μ sul piano rappresentativo, e sulla superficie va allora considerata una *curva limite* (o *di passaggio*), ecc.; però se $D > 2p$ il Teor. 2° di quella Nota prova che è necessariamente $\mu = 1$.

« È appunto su questa considerazione che anzitutto io desidero insistere. Grazie ad essa i problemi sui sistemi lineari si rispecchiano in problemi sulle superficie (semplici o multiple, ed in quest'ultimo caso con curve limiti) dei vari spazi per modo che le proprietà *projettive* di queste corrispondono ed equivalgono alle proprietà dei sistemi lineari *invariabili per trasformazioni birazionali* del piano (ad esempio i numeri relativi al sistema che sono invarianti per tali trasformazioni son dati dagl'invarianti assoluti projettivi delle superficie corrispondenti). Come da proprietà note del sistema lineare si deducono proprietà della superficie che su quello si rappresenta, così viceversa *per certe questioni si potrà anche e con grande vantaggio dallo studio diretto della superficie dedurre delle proprietà del sistema lineare*. Qualche cosa in questo senso fu

Ogni sistema lineare di curve piane iperellittiche di genere π, nel quale il passaggio di una curva per un punto arbitrario non porti di conseguenza il passaggio per altri punti determinati dal primo, può ri-

---

già fatto pei sistemi tripli di curve piane e per le superficie razionali di S_3, tra gli altri dal Caporali (specialmente per questioni numerative): ma conviene andare più oltre.

« Un bell'esempio di applicazione di questo concetto è appunto quello che tu ne fai nel lavoro attuale ai sistemi di curve iperellittiche. Altre applicazioni eran fatte brevemente nella mia Nota alla determinazione di tutti i sistemi lineari di genere $p=0$, 1 e 2. (Quanto alla determinazione di cui pur parlavo del massimo di D o di k per ogni valor dato di p, essa cade dopo la publicazione che l'Autore del lavoro su ciu allora mi basavo fece delle dimostrazioni degli enunciati contenuti in quello; ma ai veri valori massimi di D e di k tu stesso giungi nel lavoro che stai scrivendo, ajutandoti ancora col concetto su cui io insisto). E si potrebbe, come ivi dicevo, seguire in generale lo stesso procedimento: ad ogni superficie di S_k d'ordine D e a sezioni spaziali del genere p la quale sia rappresentabile univocamente sul piano corrisponde tutta una *famiglia* di sistemi lineari ∞^k di curve di genere p con D intersezioni variabili, deducibili l'uno dall'altro con trasformazioni birazionali; sicchè quando si conoscano tutte quelle superficie (diverse fra loro projettivamente) saran note tutte le diverse famiglie di sistemi lineari siffatti.

« Ma qui è che debbo aggiungere un'osservazione. A rappresentare tutta una famiglia di sistemi lineari di curve piane identici per trasformazioni birazionali si son scelti quasi sempre i *sistemi d'ordine minimo*. Questa scelta (non inopportuna, ma certamente *arbitraria*) produce un inconveniente nell'applicazione del metodo di cui io parlo: fa cioè apparire come essenzialmente diverse (perchè corrispondenti a sistemi d'ordine minimo affatto diversi) delle famiglie di sistemi lineari che invece si possono considerare come rientranti l'una nell'altra e che corrispondono a superficie che son casi particolari l'una dell'altra. Così il sistema di genere $p=0$ e d'ordine minimo che rappresenta una rigata razionale normale d'ordine D ha l'ordine più elevato quando quella rigata si particolarizza pel degenerare della sua direttrice minima (in un certo numero di generatrici ed una direttrice d'ordine inferiore); sicchè, quantunque la famiglia dei sistemi lineari rappresentativi di una tal rigata *particolare* sia essa stessa inclusa come caso particolare nella famiglia dei sistemi rappresentativi della rigata razionale *generale*, pure non si può dire che il sistema d'ordine minimo della 1ª famiglia sia caso particolare di quello della 2ª. Un fatto analogo si vede nel tuo lavoro per le superficie a sezioni spaziali iperellittiche e pei sistemi lineari di curve piane iperellittiche: anche qui l'abbassarsi dell'ordine della *direttrice minima* (cioè lo spezzarsi di questa) è una particolarità per la superficie, ma produce un elevamento nell'ordine minimo del sistema rappresentativo. È così che in particolare, enunciando alla fine della mia Nota che i sistemi di genere 2 (di dimensione >2) si posson ridurre con

dursi mediante trasformazioni birazionali ad uno dei seguenti sistemi minimi, o ad uno dei sistemi che ne derivano coll' aggiunta di punti base semplici:

1) *curve d'ordine $\pi + 3$ con un punto multiplo secondo $\pi + 1$ ordinario, ed un punto doppio;*

2) *curve d'ordine $2\pi + 2 - \mu$ con un punto multiplo secondo $2\pi - \mu$ e $\pi - \mu$ punti doppi infinitamente vicini a questo* (potendo esser $\mu = 0, 1, 2 \ldots \pi$). (*).

Dalla rappresentazione piana qui data della $F^{4\pi+4}$ si possono dedurre altre proprietà della superficie; la stessa via può seguirsi per lo studio di quelle superficie a sezioni iperellittiche di genere π che hanno l'ordine inferiore a $4\pi + 4$, le quali, come mostrai, sono proiezioni della $F^{4\pi+4}$ da alcuni suoi punti. Ma io credo inutile di proseguire in questa ricerca che del resto non presenta nessuna difficoltà.

Torino, gennaio 1890.

G. CASTELNUOVO.

---

trasformazioni birazionali a sistemi di quartiche con un punto doppio, oppure di quintiche con un punto triplo ed uno doppio, io omettevo, come giustamente rilevò il sig. Guccia (nello stesso 1° vol. di questi Rendiconti, pag. 388), i sistemi riducibili a sestiche con un punto quadruplo a cui sono infinitamente vicini 2 punti doppi. Questa famiglia di sistemi, e la superficie che le corrisponde, sono evidentemente casi particolari della famiglia di sistemi e della superficie che son rappresentate dal sistema delle sestiche con un punto quadruplo e due punti doppi *non* infinitamente vicini, sistema che è trasformabile in quello delle quartiche con un punto doppio. Mentre quest'ultima superficie, generale, ha per direttrice minima una conica non appartenente al sistema ∞^1 che genera la superficie, per quella particolare prima nominata tutte quelle ∞^1 coniche passano per uno stesso punto (triplo per la superficie) e si può dire che ad una qualunque di esse si è ridotta la conica direttrice.

C. SEGRE ».

(*) Questo teorema poteva dedursi subito tenendo conto dell'ultima nota al § 5 e di alcune proposizioni dovute al sig. Jung (*Ricerche sui sistemi lineari di curve piane*, Memoria II, §§ 6, 7 — Annali di Matematica, t. XVI, serie II).

Aggiungerò che l'esistenza di un sistema lineare 2) per qualunque valore di μ è provata dall'equazione del sistema stesso. Se $u_{\pi-\mu}$, v_μ, $v_{\pi+1}$, $v_{2\pi+2-\mu}$ sono quattro forme nelle variabili x, y dei gradi indicati dai rispettivi indici, l'equazione

$$u^2_{\pi-\mu}\, v_\mu\, z^2 + u_{\pi-\mu}\, v_{\pi+1}\, z + v_{2\pi+2-\mu} = 0,$$

quando si tengano fissi i coefficienti della $u_{\pi-\mu}$ e si facciano variare i coefficienti nelle v, rappresenta tutte le curve del sistema 2); essendo ($x = 0$, $y = 0$) il punto multiplo secondo $2\mu - \pi$.

LES COMBINAISONS CARACTÉRISTIQUES

DANS LA TRANSFORMATION D'UN POINT SINGULIER;

par M. **M. Noether**, à Erlangen.

Adunanza del 23 febbrajo 1890.

Au sujet du développement suivant les puissances ascendantes, à exposants positifs et fractionnaires, qui correspond à une « branche » (cycle) d'un point singulier d'une courbe algébrique, H. J. S. Smith (*) et G. Halphen (**) ont prouvé que ce sont seulement les exposants de certains termes de ce développement — les termes « caractéristiques » ou « critiques » — qui entrent dans la définition des nombres de singularités de la branche. D'autre part, l'on sait que, analytiquement, il faut déduire ces développements d'une succession de transformations quadratiques de la courbe qui résolvent la singularité de plus en plus, mais que ce procédé analytique conduit lui-même à une série de fra-

(*) *On the Higher Singularities of Plane Curves* [Proceed. of the London Mathematical Society, VI, 1875 (1873)].

(**) *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, XXVI, n° 2, 1877 (1874)]; *ou* Journal de Liouville, 3ème série, t. II; *ou* l'« Étude » dans l'Appendice de la traduction française des « Courbes planes » de M. Salmon.

ctions continues (*) d'où se composent directement des nombres qui définissent la singularité (**). Ainsi, on peut se demander : quelles sont, parmi les combinaisons de ces nombres de transformations, les nombres caractéristiques de Smith et Halphen ? Ou, plus directement : quelles, parmi ces combinaisons, sont des nombres caractéristiques pour la singularité ? Je répondrai à ces questions en m'appuyant sur les idées et définitions de mon Mémoire cité. En publiant cette Note j'espère faire mieux comprendre les rélations qui existent entre les travaux de Smith et Halphen et les miens.

I.

Dans ces §§ I-IV je ne parlerai que d'une seule branche multiple irréductible (cycle) Z d'un point singulier P d'une courbe algébrique f, soit que f ne possède qu'une branche en P, soit qu'on ait déjà séparé cette branche des autres par des transformations univoques de f.

Soient $x = y = 0$ les coordonnées du point P, $y = 0$ la tangente de la branche Z. Soit Z λ_1-ple, c'est-à-dire que $x = 0$ coupe Z en λ_1 points en P; la tangente $y = 0$ aura λ points d'intersection avec Z, où $\lambda > \lambda_1$. Je pose

$$(1) \qquad \lambda = l\lambda_1 + \lambda_2 \qquad (l \text{ positif et entier}, \lambda_2 < \lambda_1).$$

Par les substitutions quadratiques successives

$$(2) \qquad y = xy_1, \qquad y_1 = xy_2, \qquad \ldots \qquad y_{l-2} = xy_{l-1}$$

la courbe f se transforme en f_1, f_2, ... f_{l-1}; f_i aura, correspondant à Z, en $x = 0$, $y_i = 0$, une branche Z_i. Cette branche sera encore λ_1-ple; puisque Z_i est coupée par $x = 0$ en λ_1 points, par $y_i = 0$ en

(*) *Voir* Hamburger, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XVI, 1871 et spécialement : Königsberger, *Leçons sur la théorie des fonctions elliptiques* (9ème Leçon), Leipzig, Teubner, 1874; Noether, Gött. Nachr., 1871 et Math. Annalen, IX, 1875.

(**) *Voir* mon Mémoire sur les points singuliers, Math. Annalen, IX.

$\lambda - i\lambda_1 > \lambda_1$ points ; $y_i = 0$ sera la tangente de Z_i. En substituant de plus

$$y_{l-1} = xx_1,$$

ou, en tout,

$$y = x^l x_1,$$

la courbe f est transformée en $\varphi_1(x, x_1)$, avec une branche $Z^{(1)}$ en $x = 0$, $x_1 = 0$, qui est coupée par $x = 0$ en λ_1 points, par $x_1 = 0$ en $\lambda - l\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_1$ points. Ainsi $Z^{(1)}$ est λ_2-ple, avec la tangente $x = 0$.

À cause de cette dernière circonstance, dans la substitution suivante il faut introduire une nouvelle variable au lieu de x.

Soit

$$\lambda_1 = l_1\lambda_2 + \lambda_3 \qquad (\lambda_3 < \lambda_2);$$

par une substitution

$$x = x_1^{l_1} x_2$$

on transforme la courbe φ_1 en $\varphi_2(x_1, x_2)$, avec une branche $Z^{(2)}$ en $x_1 = x_2 = 0$, qui est coupée par $x_1 = 0$ (comme φ_1) en λ_2 points, par $x_2 = 0$ en $\lambda_1 - l_1\lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_2$ points. $Z^{(2)}$ sera λ_3-ple, avec la tangente $x_1 = 0$. Il faut alors substituer une nouvelle variable x_3 au lieu de x_1.

Soit de même, pour les deux « nombres fondamentaux » λ_1 et λ de Z:

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= l\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 &= l_1\lambda_2 + \lambda_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{q-2} &= l_{q-2}\lambda_{q-1} + \lambda_q \\ \lambda_{q-1} &= l_{q-1}\lambda_q\,; \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} \lambda_i < \lambda_{i-1} \\ \lambda_{q+1} = 0 \end{pmatrix}$$

par les substitutions successives

$$(4) \quad y = x^l x_1, \quad x = x_1^{l_1} x_2, \quad x_1 = x_2^{l_2} x_3, \quad \ldots \quad x_{q-2} = x_{q-1}^{l_{q-1}} x_q$$

on transforme la courbe f en

$$\varphi_1(x, x_1), \quad \varphi_2(x_1, x_2), \quad \ldots \quad \varphi_q(x_{q-1}, x_q).$$

La courbe φ_{q-1} aura, correspondant à Z, une branche $Z^{(q-1)}$ en $x_{q-2} = x_{q-1} = 0$, qui est coupée par $x_{q-1} = 0$ en λ_q points, par $x_{q-2} = 0$ en λ_{q-1} points : une branche λ_q-ple avec la tangente $x_{q-2} = 0$. La courbe φ_q, au contraire, n'aura plus sa branche correspondante $Z^{(q)}$ en $x_{q-1} = x_q = 0$, à cause de $\lambda_{q+1} = 0$, mais en

$$(5) \qquad x_{q-1} = 0, \qquad x_q = c \qquad (\text{où } c \neq 0 \text{ et } \neq \infty);$$

et $Z^{(q)}$ aura λ_q points d'intersection avec $x_{q-1} = 0$.

λ_q est le plus grand commun diviseur de λ_1 et λ. Si ce nombre λ_q est égal à 1, la succession de transformations se termine par φ_{q-1} ou φ_q, puisque dans ce cas $Z^{(q-1)}$ et $Z^{(q)}$ sont des branches *simples*. Si $\lambda_q > 1$, on continuera les transformations de φ_q, d'après le § suivant.

Nous calculerons d'abord les contributions aux nombres de singularités de la branche Z qui sont fournies pas les transformations (4) de f.

Dans la *réduction du genre p* de f, la branche Z compte pour un point λ_1-ple ordinaire, joint à une singularité qui est celle de la branche Z_1 de f_1 (2). Z_1 compte pour un point λ_1-ple ordinaire, joint à la singularité de la branche Z_2 de f_2; etc. Ainsi:

Z compte pour l points λ_1-ples ordinaires (situés successivement), joints à la singularité de la branche $Z^{(1)}$ de φ_1 (4);

$Z^{(1)}$ compte pour l_1 points λ_2-ples ordinaires, joints à la singularité de la branche $Z^{(2)}$ de φ_2;

. . . .

$Z^{(q-1)}$ compte pour l_{q-1} points λ_q-ples ordinaires, joints à la singularité de la branche $Z^{(q)}$ de φ_q.

Donc la réduction totale du genre p due à Z devient:

$$(6) D = \tfrac{1}{2} l \lambda_1 (\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2} l_1 \lambda_2 (\lambda_2 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2} l_{q-1} \lambda_q (\lambda_q - 1) + D_1,$$

où D_1 désigne la réduction totale du genre de φ_q due à $Z^{(q)}$. En vertu des formules (3) on obtient

$$(7) D = \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2}\lambda_{q-1}(\lambda_q - 1) + D_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_q) + D_1.$$

La branche irréductible λ_1-ple, Z, contient une « ramification » de l'ordre $\lambda_1 - 1$ (*voir* Math. Ann., IX); par là, la *classe* de la courbe f est réduite par la branche Z de

$$(8) \quad R = 2D + (\lambda_1 - 1) = \lambda(\lambda_1 - 1) + (\lambda_q - 1) + 2D_1.$$

Ici on suppose $\lambda > \lambda_1$; dans la formule (7), à cause de la symétrie en λ_1 et λ, λ peut être $\gtrless \lambda_1$.

II.

Si $\lambda_q = 1$, on aura $D_1 = 0$ et

$$D = \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda_1 - 1), \qquad R = \lambda(\lambda_1 - 1).$$

Si $\lambda_q > 1$, pour calculer D_1 il faut transformer la branche $Z^{(q)}$ de φ_q d'une manière analogue à (4).

Pour avoir des denominations de $Z^{(q)}$, analogues à celles de Z du § I, je pose

$$(9) \quad Z^{(q)} = Z^{(1,0)}, \quad \lambda_q = \mu_1, \quad x_{q-1} = \xi, \quad (x_q - c) - Cx_{q-1} = X,$$

où c est défini par (5).

La branche $Z^{(1,0)}$ de $\varphi_q(x_{q-1}, x_q) \equiv \varphi_q$ part de $\xi = 0$, $X = 0$; $\xi = 0$ coupera $Z^{(1,0)}$ en μ_1 points. Ainsi il y a à distinguer deux cas:

a) $Z^{(1,0)}$ est une branche μ_1-ple ; la tangente est différente de $\xi = 0$ et est désignée par $X = 0$ ($C \neq \infty$). Je suppose que cette tangente coupe $Z^{(1,0)}$ en μ points, où $\mu > \mu_1$.

b) $Z^{(1,0)}$ a $\xi = 0$ pour tangente; soit alors $Z^{(1,0)}$ une branche μ-ple, où $\mu < \mu_1$, et soit $X = 0$ une droite quelconque passant par le point $x_{q-1} = 0$, $x_q = c$ et différente de $\xi = x_{q-1} = 0$. Elle coupera $Z^{(1,0)}$ en μ points.

Soit pour ces deux « nombres fondamentaux » μ_1 et μ de $Z^{(1,0)}$ dans le cas *a*), conformément à (3) :

$$
(10) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mu &= m\,\mu_1 + \mu_2 \\
\mu_1 &= m_1\mu_2 + \mu_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_{r-2} &= m_{r-2}\mu_{r-1} + \mu_r \\
\mu_{r-1} &= m_{r-1}\mu_r\,;
\end{aligned}
\right. \qquad \begin{pmatrix} \mu_i < \mu_{i-1} \\ \mu_{r+1} = 0 \end{pmatrix}
$$

par les substitutions successives

$$
(11) \quad X = \xi^{m}\xi_1, \quad \xi = \xi_1^{m_1}\xi_2, \quad \xi_1 = \xi_2^{m_2}\xi_3, \quad \ldots \quad \xi_{r-2} = \xi_{r-1}^{m_{r-1}}\xi_r
$$

la courbe φ_q se transformera en

$$
\psi_1(\xi, \xi_1), \qquad \psi_2(\xi_1, \xi_2), \qquad \ldots \qquad \psi_r(\xi_{r-1}, \xi_r).
$$

Dans le cas *b*), $\mu < \mu_1$, on n'a qu'à poser dans ces formules $m=0$, $\mu_2=\mu$; d'où la première des substitutions (11) devient $X=\xi_1$, ce que l'on peut omettre.

La courbe ψ_r aura, correspondant à Z et à $Z^{(1,0)}$, une branche $Z^{(1,r)}$, qui a son origine en

$$
(12) \qquad \xi_{r-1} = 0, \qquad \xi_r = c_1, \qquad \text{où } c_1 \neq 0 \text{ et } \neq \infty,
$$

et qui est coupée par $\xi_{r-1} = 0$ en μ_r points. Par là l'on aura, semblablement à (7) :

$$
(13) \qquad D_1 = \tfrac{1}{2}\mu(\mu_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_r) + D_2,
$$

où D_2 désigne la réduction du genre de la courbe ψ_r due à la branche $Z^{(1,r)}$. Cette formule est vraie pour les deux cas *a*) et *b*), c'est-à-dire pour $\mu \gtrless \mu_1$.

Soit de même :

(14) $Z^{(1,r)} = Z^{(2,0)}, \quad \mu_r = \nu_1, \quad \xi_{r-1} = \eta, \quad (\xi_r - c_1) - C_1 \xi_{r-1} = \Xi;$

$\eta = 0$ coupera $Z^{(2,0)}$ en ν_1 points. Il y aura encore deux nombres fondamentaux de $Z^{(2,0)}$, ν_1 et ν, où ν désigne le nombre des intersections de $\Xi = 0$ avec $Z^{(2,0)}$ et où $\nu \gtrless \nu_1$.

Soit

$$(15) \qquad \nu = n\nu_1 + \nu_2, \qquad \nu_1 = n_1\nu_2 + \nu_3, \qquad \ldots \qquad \nu_{s-1} = n_{s-1}\nu_s;$$
$$(\nu_i < \nu_{i-1}, \ \nu_{s+1} = 0).$$

on transformera la courbe ψ_r par les substitutions

$$(16) \qquad \Xi = \eta^n \eta_1, \qquad \eta = \eta_1^{n_1} \eta_2, \qquad \ldots \qquad \eta_{s-2} = \eta_{s-1}^{n_{s-1}} \eta_s$$

en

$$\chi_1(\eta, \eta_1), \qquad \chi_2(\eta_1, \eta_2), \qquad \ldots \qquad \chi_s(\eta_{s-1}, \eta_s).$$

La courbe χ_s aura une branche $Z^{(2,s)} = Z^{(3,0)}$ en

$$\eta_{s-1} = 0, \ \eta_s = c_2 \qquad (c_2 \neq 0, \neq \infty)$$

coupée par $\eta_{s-1} = 0$ en ν_s points, avec deux nombres fondamentaux $\nu_s = \rho_1$ et ρ. Pour D_2 on aura

$$(17) \qquad D_2 = \tfrac{1}{2}\nu(\nu_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(\nu_1 - \nu_s) + D_3,$$

où D_3 appartient à $Z^{(3,0)}$.

En continuant ainsi, après un nombre limité (*) d'opérations, la succession de nombres

$$\lambda_q = \mu_1, \quad \mu_r = \nu_1, \quad \nu_s = \rho_1, \quad \ldots$$

(*) Si le procédé était illimité, on aurait un nombre infini de points multiples de f en Z. Dans ce cas Z ne serait pas irréductible et f contiendrait une *courbe* multiple. La démonstration la plus simple de ce fait est la suivante : Soit f de l'ordre n; on peut aisément construire une courbe F de l'ordre $n - 2$, adjointe à f en une partie de ces points multiples et qui coupe f en plus de $n(n - 2)$ points; cette courbe F et f auront alors une courbe f' en commun, d'un ordre $\leqq n - 2$. Pour f' on raisonne de même, etc.

finira par 1, et la réduction D_a, appartenant à la branche simples $Z^{(a,0)}$ de la dernière des courbes

$$(18)\qquad f,\ \varphi_q,\ \psi_r,\ \chi_s,\ \vartheta_t,\ \ldots,$$

sera zéro. En résumant (7), (8), (13), (17), ... on aura ainsi :

$$(19)\quad \begin{cases} D = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\lambda(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\mu(\mu_1 - 1) + \frac{1}{2}\nu(\nu_1 - 1) + \ldots \\ R = \lambda(\lambda_1 - 1) + \mu(\mu_1 - 1) + \nu(\nu_1 - 1) + \ldots \end{cases}$$

où $\lambda > \lambda_1$.

III.

Les formules (19) contiennent les couples de nombres fondamentaux

$$(20)\qquad \lambda_1,\ \lambda;\quad \mu_1,\ \mu;\quad \nu_1,\ \nu;\quad \rho_1,\ \rho;\quad \ldots$$

des branches Z, $Z^{(1,0)}$, $Z^{(2,0)}$, $Z^{(3,0)}$, ... des courbes (18);

μ_1 étant le plus grand commun diviseur de λ_1 et λ,
ν_1 » » » » » » μ_1 et μ,
ρ_1 » » » » » » ν_1 et ν,
. . . . ;

les nombres (20) sont déterminés par

$$(21)\qquad \lambda_1,\ \lambda;\quad \mu;\quad \nu;\quad \rho;\quad \ldots$$

et l'on pourrait considérer (21) ou (20) comme des nombres « caractéristiques » de la singularité Z de f. Mais si quelques nombres *successifs* entre les diviseurs

$$\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1,\ \rho_1,\ \ldots$$

sont égaux entre eux, les *sommes* des nombres correspondants de la série

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho,\ \ldots$$

entrent seulement dans les formules (19). Il s'en suit qu'il suffira de considérer seulement ces *combinaisons* comme des nombres caractéristiques.

Soient :

$$\lambda_1 = \Delta_0, \qquad \lambda = \alpha_0, \qquad \mu_1 = \Delta_1; \tag{22}$$

Δ_2 le premier des diviseurs ν_1, ρ_1, σ_1, ... différant de $\mu_1 = \Delta_1$,
Δ_3 » » » » ρ_1 σ_1, ... » » Δ_2,
. . . . ;

α_1 la somme des nombres, dans la série μ, ν, ρ, σ, ..., qui correspondent aux diviseurs égaux à $\mu_1 = \Delta_1$;

α_2 la somme des nombres, dans la série ν, ρ, σ, ..., qui correspondent aux diviseurs égaux à Δ_2;

. . . .

On aura Δ_i comme plus grand commun diviseur de Δ_{i-1} et α_{i-1}, et

$$\alpha_0 > \Delta_0; \; \Delta_0 \geqq \Delta_1; \; \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \ldots > \Delta_b > \Delta_{b+1} = 1. \tag{23}$$

J'appellerai les couples de nombres

$$\Delta_0, \alpha_0; \quad \Delta_1, \alpha_1; \quad \Delta_2, \alpha_2; \quad \ldots \quad ; \Delta_b, \alpha_b \tag{24}$$

les « combinaisons caractéristiques » de la singularité de la branche Z de f.

Par (19) on aura :

$$\left.\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - 1)(\Delta_0 - 1) + \tfrac{1}{2}\alpha_1(\Delta_1 - 1) + \tfrac{1}{2}\alpha_2(\Delta_2 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha_b(\Delta_b - 1), \\ R &= \alpha_0(\Delta_0 - 1) + \alpha_1(\Delta_1 - 1) + \ldots + \alpha_b(\Delta_b - 1). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

D'ailleurs il est possible de donner une signification géométrique directe à ces combinaisons caractéristiques dans la théorie de la transformation univoque de la courbe f. Pour montrer cela, je supposerai, par exemple, que l'on ait

$$\mu_1 = \nu_1 = \rho_1 = \Delta_1, \qquad \sigma_1 = \Delta_2 < \Delta_1, \qquad \mu + \nu + \rho = \alpha_1.$$

Alors, les systèmes (10) et (15) se réduisent à leurs premières équations

$$\mu = m\Delta_1, \qquad \nu = n\Delta_1, \qquad (m > 1, n > 1)$$

le groupe de transformations (11) se réduit à la première ($r = 1$):

$$X = \xi^m \xi_1,$$

qui transforme φ_q en ψ_1, avec une branche Δ_1-ple $Z^{(2,0)}$ en

$$\eta \equiv \xi = 0, \qquad \xi_1 = c_1 \qquad (c_1 \neq 0, \neq \infty)$$

et avec la tangente

$$\Xi \equiv (\xi_1 - c_1) - C_1\xi = 0,$$

qui coupe $Z^{(2,0)}$ en ν points. De même, les transformations (16) se réduisent à la première d'entre elles ($s = 1$):

$$\Xi = \xi^n \eta_1$$

qui transforme ψ_1 en χ_1. χ_1 aura une branche $Z^{(3,0)}$, passant par

$$\xi = 0, \qquad \eta_1 = c_2 \, (\neq 0, \neq \infty),$$

coupée par $\xi = 0$ en Δ_1 points, et avec un deuxième nombre fondamental $\rho \gtrless \Delta_1$, où ρ est le nombre des intersections de $Z^{(3,0)}$ avec une droite

$$(\eta_1 - c_2) - C_2\xi \equiv H = 0.$$

De χ_1 on va à ϑ_t (18), avec les nombres σ_1, σ, d'après le § II; etc.

En résumant, on a pour le passage de φ_q à χ_1:

$$X = \xi^m \xi_1 = \xi^m(c_1 + C_1\xi + \Xi) = \xi^m(c_1 + C_1\xi) + \xi^{m+n}(c_2 + C_2\xi + H).$$

Je remplacerai cette substitution par les deux suivantes :

$$(26) \qquad X - \xi^m(c_1 + C_1\xi) - \xi^{m+n}(c_2 + C_2\xi) = X_0, \qquad (m \text{ et } n > 1)$$

$$(26)' \qquad X_0 = \xi^{m+n} H.$$

Par la substitution parabolique (26) la courbe φ_q se transforme dans une courbe $F_1(X_0, \xi)$, avec une branche ${}^1Z$, correspondant à Z de f. ${}^1Z$ est multiple d'ordre $\mu_1 = \Delta_1$; puisque l'intersection avec $\xi = 0$ consiste en Δ_1 points, l'intersection avec sa tangente $X_0 = 0$ en autant de points que ceux de l'intersection de la branche $Z^{(1,0)}$ de la courbe χ_s avec la courbe

$$X_0 = \xi^{m+n} H = 0,$$

c'est-à-dire en

$$(m+n)\mu_1 + \rho = \mu + \nu + \rho = \alpha_1$$

points.

Cette définition des nombres Δ_1, α_1 pour la courbe F_1 est tout-à-fait analogue à celle des nombres $\Delta_0 = \lambda_1$, $\alpha_0 = \lambda$ pour la courbe f, ou de μ_1, μ pour la courbe φ_q. On peut donc dire *que les combinaisons caractéristiques de* (24)

$$\Delta_1, \alpha_1; \quad \Delta_2, \alpha_2; \quad \dots \quad ; \Delta_b, \alpha_b$$

appartiennent à la singularité ${}^1Z$ *de* F_1, *aussi bien que* (24) *à* f.

Pour voir cela, on n'a qu'à continuer le procédé indiqué. La transformation suivante de F_1 se forme en composant (26)' qui conduit à χ_s, avec celle qui transforme χ_s en $\mathfrak{z}_t$; et l'on a ainsi, à partir de σ_1, σ, les mêmes couples de nombres que dans (20). On n'a qu'à écrire

$$f - F_1 - \mathfrak{z}_t$$

au lieu de

$$f - \varphi_q - \psi_r - \chi_s - \mathfrak{z}_t.$$

Si quelques uns des diviseurs σ_1, τ_1, ... sont égaux entre eux, par une transformation parabolique analogue à (26) on n'a qu'à substituer une courbe F_2, avec les nombres fondamentaux Δ_2, α_2, au lieu de $\mathfrak{z}_t$; etc. Pour la série de courbes ainsi obtenues

$$f, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3, \dots$$

les couples de nombres (24) sont les « nombres fondamentaux » de leurs branches

$$Z, \quad {}^1Z, \quad {}^2Z, \quad {}^3Z, \dots.$$

On a vu que F_1 et φ_q (ou F_2 et $\mathfrak{z}_l$, etc.) apportent les mêmes réductions à D et à R. En effet, F_1 se déduit de φ_q par une substitution parabolique (26) qui ne rend pas *indéterminée* la valeur de X_0 pour $\xi = 0$, $X = 0$. Ainsi, les branches singulières ${}^1Z$ et $Z^{(1,0)}$ des courbes F_1 et φ_q auront des points multiples égaux en nombres et en succession; avec cette seule différence que les points multiples de F_1, correspondant à ceux de φ_q qu'on peut dire situés successivement sur la *courbe parabolique*

$$X - \xi^m(c_1 + C_1\xi) - \xi^{m+n}(c_2 + C_2\xi) = 0,$$

sont situés successivement sur la *droite* $X_0 = 0$.

IV.

Je vais comparer les combinaisons (24) aux nombres caractéristiques de Smith et de Halphen. Pour cela il faut considérer le développement de y suivant les puissances ascendantes, à exposants fractionnaires, de x, qui existe pour la branche singulière Z de f.

J'adopte la notation d'Halphen pour une série entière (finie ou infinie) en t:

$$[t] = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

dont le premier coefficient a_0 est toujours supposé *différent de zéro*, sans préciser d'ailleurs les coefficients a_i.

Le développement de y procédera suivant les puissances ascendantes de $x^{\frac{1}{\lambda_1}} = x^{\frac{1}{\Delta_0}}$:

$$y = x^{\frac{\lambda}{\lambda_1}}.[x^{\frac{1}{\lambda_1}}].$$

Posons, en (3):

$$\frac{\lambda}{\Delta_1} = \beta, \quad \frac{\lambda_1}{\Delta_1} = \beta_1, \quad \frac{\lambda_2}{\Delta_1} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\lambda_q}{\Delta_1} = \beta_q = 1, \quad \beta_{q+1} = 0;$$

on aura

$$y = x^{\frac{\beta}{\beta_1}}.[x^{\frac{1}{\beta_1}}] + x^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}}.[x^{\frac{1}{\lambda_1}}],$$

où γ_1 est, dans la suite des exposants ascendants avec le dénominateur commun $\lambda_1 = \Delta_0$, le premier numérateur qui ne soit pas divisible par $\Delta_1 = \mu_1$.

La première des substitutions (4) donne

$$x_1 = x^{\frac{\beta_2}{\beta_1}}.[x^{\frac{1}{\beta_1}}] + x^{\frac{\gamma_1 - \lambda + \lambda_2}{\lambda_1}}.[x^{\frac{1}{\lambda_1}}],$$

dont l'inversion donnera (*):

$$x = x_1^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}.[x_1^{\frac{1}{\beta_2}}] + x_1^{\frac{\gamma_1 - \lambda + \lambda_1}{\lambda_2}}.[x_1^{\frac{1}{\lambda_2}}].$$

En continuant les substitutions (4) on aura ainsi:

$$x_2 = x_1^{\frac{\beta_3}{\beta_2}}.[x_1^{\frac{1}{\beta_2}}] + x_1^{\frac{\gamma_1 - \lambda + \lambda_3}{\lambda_2}}.[x_1^{\frac{1}{\lambda_2}}],$$

. . . .

$$x_q = [x_{q-1}] + x_{q-1}^{\frac{\gamma_1 - \lambda}{\lambda_q}}.[x_{q-1}^{\frac{1}{\lambda_q}}].$$

La fonction entière $[x_{q-1}]$ de x_{q-1} commence par la constante $c \neq 0$, d'après (5). Le développement commençant par une fonction entière, on fera, d'après ce qu'on a dit dans le § III, une substitution parabolique de la forme (26).

En posant [*voir* II (9) et III (26)]

$$\lambda_q = \mu_1 = \Delta_1, \qquad x_{q-1} = \xi, \qquad x_q - [x_{q-1}] = X_0,$$

le dernier développement devient

$$X_0 = \xi^{\frac{\gamma_1 - \alpha_0}{\Delta_1}}.[\xi^{\frac{1}{\Delta_1}}].$$

Ici $\gamma_1 - \alpha_0$ est le nombre des points d'intersection de cette branche

(*) *Voir* les travaux cités dans les notes (*) et (**) de l'introduction, p. 89.

${}^1Z$ de $F_1(X_0, \xi)$ avec $X_0 = 0$; c'est-à-dire $= \alpha_1$, d'après la notation du § III:

$$\gamma_1 = \lambda + \alpha_1 = \alpha_0 + \alpha_1.$$

Le plus grand commun diviseur de Δ_1 et de α_1 (ou de γ_1) était désigné par Δ_2; soit

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = q_1, \qquad \frac{\gamma_1 - \alpha_0}{\Delta_2} = \frac{\alpha_1}{\Delta_2} = s_1,$$

et soit de plus, dans la suite des exposants du développement de X_0, $\gamma_2 - \alpha_0$ le premier des numérateurs non divisibles par Δ_2; l'on aura:

$$X_0 = \xi^{\frac{s_1}{q_1}}.[\xi^{\frac{1}{q_1}}] + \xi^{\frac{\gamma_2-\alpha_0}{\Delta_1}}.[\xi^{\frac{1}{\Delta_1}}].$$

De cette branche ${}^1Z$ de $F_1(X_0, \xi)$ on passe (d'après III) à une branche ${}^2Z$ d'une courbe $F_2(Y_0, \eta)$, comme de Z à ${}^1Z$; et l'on aura un développement pour ${}^2Z$:

$$Y_0 = \eta^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\Delta_2}}.[\eta^{\frac{1}{\Delta_2}}] = \eta^{\frac{s_2}{q_2}}.[\eta^{\frac{1}{q_2}}] + \eta^{\frac{\gamma_3-\gamma_1}{\Delta_2}}.[\eta^{\frac{1}{\Delta_2}}],$$

où:

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2;$$

Δ_3 est le plus grand commun diviseur de Δ_2 et de γ_2;

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_3} = q_2, \qquad \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\Delta_3} = \frac{\alpha_2}{\Delta_3} = s_2;$$

$\gamma_3 - \gamma_1$ est le premier des numérateurs des exposants non divisibles par Δ_3.

Ainsi, on peut écrire le développement de y de la manière suivante:

$$y = x^{\frac{\alpha_0}{\Delta_0}}.[x^{\frac{\Delta_1}{\Delta_0}}] + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\Delta_0}}.[x^{\frac{\Delta_2}{\Delta_0}}] + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}{\Delta_0}}.[x^{\frac{\Delta_3}{\Delta_0}}] +$$
$$+ \ldots + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\rho}{\Delta_0}}.[x^{\frac{1}{\Delta_0}}],$$

où les Δ *et les* α *sont les nombres définis en* (22)-(24).

Il s'en suit que nos combinaisons (24) sont essentiellement identiques aux nombres caractéristiques de Smith et de Halphen: Smith fait usage des nombres Δ et des nombres

$$\gamma_0=\alpha_0,\ \gamma_1=\alpha_0+\alpha_1,\ \gamma_2=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2,\ \ldots,\gamma_h=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_h,$$

d'où il suit, au lieu de (25),

$$D=\tfrac{1}{2}(\gamma_0-1)(\Delta_0-\Delta_1)+\tfrac{1}{2}(\gamma_1-1)(\Delta_1-\Delta_2)+\ldots+\tfrac{1}{2}(\gamma_h-1)(\Delta_h-1),$$

$$R=\gamma_0(\Delta_0-\Delta_1)+\gamma_1(\Delta_1-\Delta_2)+\ \ldots\ +\gamma_h(\Delta_h-1);$$

et Halphen des couples de nombres:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}=q_0,\ \frac{\alpha_0}{\Delta_1}=s_0;\ \frac{\Delta_1}{\Delta_2}=q_1,\ \frac{\alpha_1}{\Delta_2}=s_1;\ \frac{\Delta_2}{\Delta_3}=q_2,\ \frac{\alpha_2}{\Delta_3}=s_2;\ \ldots$$

$$\ldots;\ \Delta_h=q_h,\ \alpha_h=s_h.$$

V.

Dans ce § j'envisagerai *deux* branches singulières *différentes*, partant d'un même point P; l'une Z appartenant à une courbe f, l'autre Z' appartenant à une courbe f'; et je chercherai le nombre S des points d'intersection de ces deux branches. Je n'exclus pas le cas où la courbe f' serait identique à la courbe f. Pour cette recherche je reprendrai les notations des §§ I et II, en ajoutant partout un accent aux lettres relatives à f'.

Supposons qu'on ait, dans les formules (3), (5), (9), (10), (14) et (15):

$$\frac{\lambda'}{\lambda'_1}=\frac{\lambda}{\lambda_1},\qquad c'=c\,,\qquad C'=C\,,$$

$$\frac{\mu'}{\mu'_1}=\frac{\mu}{\mu_1},\qquad c'_1=c_1,\qquad C'_1=C_1,$$

$$\frac{\nu'}{\nu'_1}\neq\frac{\nu}{\nu_1};$$

l'on aura

$$\lambda_1'=k\lambda_1, \quad \lambda'=k\lambda, \quad \mu_1'=\lambda_q'=k\lambda_q=k\mu_1, \quad \mu'=k\mu, \quad \nu_1'=k\nu_1,$$

où k est un nombre rationnel. D'après ce que j'ai démontré dans mon Mémoire (Math. Annalen, IX ou XXIII) on a

$$S=\lambda_1\lambda_1'+\Sigma_1,$$

où Σ_1 est le nombre des intersections des branches Z_1, Z_1' des courbes qui se déduisent de f, f' par la substitution $y=xy_1$ de (2). En continuant à appliquer les substitutions (2) on a ainsi

$$S=l\lambda_1\lambda_1'+\Sigma_l,$$

où Σ_l est le nombre des intersections des branches $Z^{(1)}$, $Z^{(1)\prime}$ des courbes φ_1, φ_1' (4); et enfin, par (4):

$$S=l\lambda_1\lambda_1'+l_1\lambda_2\lambda_2'+\ldots+l_{q-1}\lambda_q\lambda_q'+S_1,$$

où S_1 est le même nombre relatif aux branches $Z^{(q)}=Z^{(1,0)}$ de φ_q et $Z^{(1,0)\prime}$ de φ_q' (9).

Par les formules (3) on a:

$$S=k[\lambda_1(\lambda-\lambda_2)+\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)+\ldots+\lambda_q\lambda_{q-1}]+S_1$$

$$=k\lambda\lambda_1+S_1=\lambda_1\lambda'+S_1=\lambda_1'\lambda+S_1,$$

ou, sous forme symétrique:

$$S=\tfrac{1}{2}(\lambda_1\lambda'+\lambda_1'\lambda)+S_1. \tag{27}$$

On a, de même:

$$S_1=k\mu\mu_1+S_2=\mu_1\mu'+S_2=\mu_1'\mu+S_2$$

$$=\tfrac{1}{2}(\mu_1\mu'+\mu_1'\mu)+S_2,$$

où S_2 est le nombre des intersections des branches $Z^{(1,r)} = Z^{(2,0)}$ de ψ_r et $Z^{(2,0)'}$ de ψ'_r(12).

Soit, en (15):

$$\begin{array}{ll} \nu = n\nu_1 + \nu_2, & \nu' = n\,\nu'_1 + \nu'_2, \\ \nu_1 = n_1\nu_2 + \nu_3, & \nu'_1 = n_1\nu'_2 + \nu'_3, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \nu_{j-2} = n_{j-2}\nu_{j-1} + \nu_j, & \nu'_{j-2} = n_{j-2}\nu'_{j-1} + \nu'_j, \end{array}$$

où
$$\nu_i < \nu_{i-1}, \quad \nu'_i < \nu'_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \ldots j),$$

mais en
$$\nu_{j-1} = n_{j-1}\nu_j + \nu_{j+1}, \qquad \nu'_{j-1} = n_{j-1}\nu'_j + \nu'_{j+1}:$$

$$\nu_{j+1} < \nu_j, \quad \nu'_{j+1} \geqq \nu'_j.$$

Les substitutions de (16), appartenant à ces nombres, transforment les courbes ψ_r, ψ'_r en

$$\chi_1, \chi'_1; \quad \chi_2, \chi'_2; \quad \cdots \quad ; \chi_j, \chi'_j.$$

Les courbes χ_j, χ'_j auront des branches $Z^{(2,j)}$, $Z^{(2,j)'}$ qui partent du même point $(\eta_{j-1} = \eta_j = 0)$; $Z^{(2,j)}$ est multiple de l'ordre ν_{j+1} $(< \nu_j)$, avec la tangente $\eta_{j-1} = 0$; $Z^{(2,j)'}$ de l'ordre ν'_j $(\leqq \nu'_{j+1})$, avec la tangente $\eta_j = 0$. L'on aura, par conséquent:

$$\begin{aligned} S_2 &= (n\nu_1\nu'_1 + n_1\nu_2\nu'_2 + \ldots + n_{j-1}\nu_j\nu'_j) + \nu_{j+1}\nu'_j \\ &= \tfrac{1}{2}(\nu_1\nu' + \nu'_1\nu) - \tfrac{1}{2}(\nu_j\nu'_{j+1} - \nu'_j\nu_{j+1}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\nu_1\nu' + \nu'_1\nu) - (-1)^j\,\tfrac{1}{2}(\nu\nu'_1 - \nu'\nu_1) \\ &= \nu\nu'_1 \text{ pour } j \text{ impair, mais} = \nu'\nu_1 \text{ pour } j \text{ pair;} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$S_2 = \nu\nu'_1, \text{ si } \frac{\nu'}{\nu'_1} > \frac{\nu}{\nu_1};$$

$$S_2 = \nu'\nu_1, \text{ si } \frac{\nu'}{\nu'_1} < \frac{\nu}{\nu_1}.$$

Si l'on a aussi

$$\frac{\nu'}{\nu'_1} = \frac{\nu}{\nu_1}, \qquad c'_2 \neq c_2,$$

on aura . . . .

$$S_2 = \nu\nu'_1 = \nu'\nu_1.$$

Si

$$\frac{\nu'}{\nu'_1} = \frac{\nu}{\nu_1}, \qquad c'_2 = c_2, \qquad C'_2 \neq C_2,$$

on aura $j = s$, et les deux courbes χ_s, χ'_s auront des branches $Z^{(2,s)}$, $Z^{(2,s)\prime}$ qui partent du même point, mais avec des tangentes différentes. $Z^{(2,s)}$ est multiple d'ordre $\nu_s = \rho_1$, $Z^{(2,s)\prime}$ est múltiple d'ordre $\nu'_s = \rho'_1 = k\rho_1$; ainsi l'on aura :

$$S_2 = \nu\nu'_1 + \rho_1\rho'_1 = \nu'\nu_1 + \rho_1\rho'_1.$$

Dans tous ces cas :

$$S = \tfrac{1}{2}(\lambda\lambda'_1 + \lambda'\lambda_1) + \tfrac{1}{2}(\mu\mu'_1 + \mu'\mu_1) + S_2$$

$$= \lambda\lambda'_1 + \mu\mu'_1 + S_2.$$

D'après ces règles on peut construire, d'une manière tout-à-fait analogue, la formule générale de S dans tous les cas. Ici aussi, comme dans le § III, on peut introduire une simplification.

Si, parmi les nombres μ_1, ν_1, ρ_1, . . . , il y en a quelques-uns qui sont successifs et égaux entre eux et qui entrent en même temps dans la formule de S (excepté la correction S', analogue à S_2), la même chose arrive pour les nombres correspondants de la suite μ'_1, ν'_1, ρ'_1, . . . ; et alors on peut ajouter les nombres correspondants des suites

$$\mu, \nu, \rho, \ldots \qquad \mu', \nu', \rho',$$

dans la formule de S. Ainsi l'on aura

$$S=\frac{1}{2}(\Delta_0\alpha'_0+\Delta'_0\alpha_0)+\frac{1}{2}(\Delta_1\alpha'_1+\Delta'_1\alpha_1)+\ldots+\frac{1}{2}(\Delta_{g-1}\alpha'_{g-1}+\Delta'_{g-1}\alpha_{g-1})+S'$$

où

$$\frac{\alpha_0}{\Delta_0}=\frac{\alpha'_0}{\Delta'_0},\quad \frac{\alpha_1}{\Delta_1}=\frac{\alpha'_1}{\Delta'_1},\quad\ldots,\quad \frac{\alpha_{g-1}}{\Delta_{g-1}}=\frac{\alpha'_{g-1}}{\Delta'_{g-1}}$$

et S' est une correction que j'ai déterminée plus haut dans tous les cas. En introduisant le diviseur Δ_g des α_i et Δ_i, et le diviseur Δ'_g des α'_i et Δ'_i $(i=0,1,\ldots,g-1)$, et en posant:

$$\frac{\alpha_i}{\Delta_g}=\frac{\alpha'_i}{\Delta'_g}=\beta_i,\qquad \frac{\Delta_i}{\Delta_g}=\frac{\Delta'_i}{\Delta'_g}=d_i\quad(i=0,1,\ldots g-1),$$

on aura

$$S=\frac{\Delta_0\Delta'_0}{d_0^2}(\beta_0 d_0+\beta_1 d_1+\ldots+\beta_{g-1}d_{g-1})+S'.$$

Dans le cas où les deux branches Z et Z' appartiennent à une même courbe f, on peut faire usage de la formule donnée de S, pour calculer les *réductions* D_0 et R_0 du *genre* et de la *classe* de f dûs à l'ensemble des deux branches. Soient D et R les réductions (19) ou (25) dûs à Z et D', R' celles dûs à Z'; l'on aura:

$$(28)\qquad D_0=D+D'+S,$$

$$(28)'\qquad R_0=R+R'+2S=2D_0+(\lambda_1-1)+(\lambda'_1-1).$$

On peut déduire aisément cette formule de D_0, de la théorie de la résolution d'un point singulier par des transformations quadratiques. Vérifions-la pour les nombres de transformation donnés.

Soit

$$\frac{\lambda'}{\lambda'_1}=\frac{\lambda}{\lambda_1};$$

on a, semblablement à (6):

$$D_0=\frac{1}{2}l(\lambda_1+\lambda'_1)(\lambda_1+\lambda'_1-1)+\frac{1}{2}l_1(\lambda_2+\lambda'_2)(\lambda_2+\lambda'_2-1)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{2}l_{q-1}(\lambda_q+\lambda'_q)(\lambda_q+\lambda'_q-1)+D_{0,1},$$

où $D_{0,1}$ désigne la réduction totale du genre de la courbe φ_q due aux branches $Z^{(q)}$ et $Z^{(q)'}$ de φ_q. Par (3):

$$D_0 = [\tfrac{1}{2}\lambda(\lambda_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_q)] + [\tfrac{1}{2}\lambda'(\lambda_1' - 1) - \tfrac{1}{2}(\lambda_1' - \lambda_q')]$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\lambda_1\lambda' + \lambda_1'\lambda) + D_{0,1}.$$

En comparant cette formule à (7) et (27) on déduit immédiatement la formule (28).

On peut exprimer cette équation (28) en d'autres mots. Écrivons

$$D_0 = \tfrac{1}{2} l\lambda_1(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2} l_1\lambda_2(\lambda_2 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2} l_{q-1}\lambda_q(\lambda_q - 1)$$

$$+ \tfrac{1}{2} l\lambda_1'(\lambda_1' - 1) + \tfrac{1}{2} l_1\lambda_2'(\lambda_2' - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2} l_{q-1}\lambda_q'(\lambda_q' - 1)$$

$$+ (l\lambda_1\lambda_1' + l_1\lambda_2\lambda_2' + \ldots + l_{q-1}\lambda_q\lambda_q') + D_{0,1},$$

et observons que $\frac{1}{2}\lambda_i(\lambda_i - 1)$ lui-même peut être considéré, si l'on veut, comme le nombre des intersections mutuelles des λ_i éléments d'une branche λ_i-ple irréductible, sans égard à la ramification de la branche; ainsi l'on dira que :

D_0 est le nombre des intersections mutuelles, sans égard à la ramification, qui existent, dans tous les points multiples dont est composée la singularité de f, entre les éléments de ces points.

De même: *R_0 est le double du nombre précédent, mais en ayant égard à la ramification d'après la formule* (28)'.

Erlangen.

M. NOETHER.

SUR UN PROBLÈME DE CONTACT DE M. DE JONQUIÈRES;

par M. **Georges Humbert**, à Paris.

Adunanza del 26 gennajo 1890.

Dans un Mémoire publié au tome 66 du Journal de Crelle, aussi original par la méthode que remarquable par les résultats, M. de Jonquières a démontré, par des considérations purement géométriques, une formule importante qui fait connaitre, d'une manière générale, le nombre des courbes algébriques planes d'un degré donné ayant, avec des courbes fixes, des contacts de nombre et de nature donnés. M. de Jonquières a également indiqué la marche à suivre pour appliquer cette formule au cas des courbes gauches.

Plus tard, Halphen et M. Brill ont eu occasion de traiter le même problème, au moins dans des cas particuliers, et ont vérifié la formule de M. de Jonquières, en tenant compte des solutions qu'y introduit l'existence, sur l'une des courbes fixes, de points singuliers à branches non distinctes.

C'est d'une vérification analogue qu'il s'agit dans cette Note; le problème que nous chercherons à résoudre est le suivant:

Etant donné un système linéaire $\rho - 1$ fois infini de surfaces algébriques d'ordre n,

$$(1)\qquad \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_\rho\varphi_\rho = 0$$

trouver le nombre de ces surfaces qui ont, en un point, avec une courbe, plane ou gauche, C, d'ordre m et de genre p, un contact d'ordre $\rho - 1$.

L'emploi des fonctions thêtafuchsiennes de M. Poincaré permet de résoudre presque immédiatement cette question; nous supposerons simplement connues les deux propositions suivantes:

1° Les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la courbe C sont proportionnelles à quatre fonctions thêtafuchsiennes $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$, $\Theta_4(u)$ de la première famille, et d'ordre μ, c'est-à-dire telles que l'on ait:

$$\Theta_i\left(\frac{\beta u + \gamma}{\delta u + \varepsilon}\right) = \Theta_i(u)(\delta u + \varepsilon)^{2\mu}, \tag{2}$$

en désignant par $\frac{\beta u + \gamma}{\delta u + \varepsilon}$ une quelconque des substitutions du groupe fuchsien correspondant, et en supposant $\beta\varepsilon - \gamma\delta = 1$.

2° Toute fonction thêtafuchsienne d'ordre μ et de genre p a $2\mu(p - 1)$ zéros dans le polygone fondamental.

Il résulte de ces deux propositions que le degré m de la courbe C est $2\mu(p - 1) - k$, en désignant par k le nombre des zéros communs aux quatre fonctions $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$, $\Theta_4(u)$; car c'est le nombre des points où la courbe C est coupée par un plan quelconque.

Cela posé, les arguments des points d'intersection d'une surface du système (1) avec C s'obtiennent en remplaçant, dans l'équation (1), x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$, $\Theta_4(u)$; soit $\varphi(u)$ la fonction $\varphi[\Theta_1(u), \Theta_2(u), \Theta_3(u), \Theta_4(u)]$, l'équation aux arguments sera:

$$\alpha_1\varphi_1(u) + \alpha_2\varphi_2(u) + \dots + \alpha_\rho\varphi_\rho(u) = 0. \tag{3}$$

D'après ce qui précède, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ... $\varphi_\rho(u)$ sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes d'ordre $n\mu$, admettant les k zéros, $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_k$, communs à $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$, $\Theta_4(u)$, au degré n de multiplicité.

Pour qu'en un point d'argument u une des surfaces (1) ait un contact d'ordre $\rho - 1$ avec C, il faut que les quantités u, α_1, α_2, ... α_ρ

vérifient l'équation (3) et ses $\rho - 1$ premières dérivées, c'est-à-dire que l'on ait :

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1 \varphi_1(u) + \alpha_2 \varphi_2(u) + \ldots + \alpha_\rho \varphi_\rho(u) = 0 \\
&\alpha_1 \varphi_1'(u) + \alpha_2 \varphi_2'(u) + \ldots + \alpha_\rho \varphi_\rho'(u) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_1 \varphi_1^{(\rho-1)}(u) + \alpha_2 \varphi_2^{(\rho-1)}(u) + \ldots + \alpha_\rho \varphi_\rho^{(\rho-1)} = 0.
\end{aligned}
$$

et par suite les valeurs de u sont données par l'équation :

$$
(5) \qquad
\begin{vmatrix}
\varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \ldots & \varphi_\rho(u) \\
\varphi_1'(u) & \varphi_2'(u) & \ldots & \varphi_\rho'(u) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_1^{(\rho-1)}(u) & \varphi_2^{(\rho-1)}(u) & \ldots & \varphi_\rho^{(\rho-1)}(u)
\end{vmatrix} = 0.
$$

Toute la question revient donc à chercher le nombre des zéros de ce déterminant, que nous désignerons par $F(u)$.

Je dis que $F(u)$ est une fonction thêtafuchsienne (holomorphe, évidemment) et dont l'ordre est facile à évaluer.

On a en effet, $\varphi(u)$ désignant une quelconque des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\rho$, qui sont des fonctions thêtafuchsiennes d'ordre $n\mu$:

$$
(6) \qquad \varphi\left(\frac{\beta u + \gamma}{\delta u + \varepsilon}\right) = \varphi(u)(\delta u + \varepsilon)^{2n\mu},
$$

$$
\frac{1}{(\delta u + \varepsilon)^2} \varphi'\left(\frac{\beta u + \gamma}{\delta u + \varepsilon}\right) = \varphi'(u)(\delta u + \varepsilon)^{2n\mu} + 2n\mu\delta\varphi(u)(\delta u + \varepsilon)^{2n\mu - 1},
$$

c'est-à-dire

$$
(7) \qquad \varphi'\left(\frac{\beta u + \gamma}{\delta u + \varepsilon}\right) = \varphi'(u)(\delta u + \varepsilon)^{2(n\mu+1)} + 2n\mu\delta\varphi(u)(\delta u + \varepsilon)^{2n\mu+1}.
$$

Si l'on remplace, dans $F(u)$, u par $\frac{\beta u+\gamma}{\delta u+\varepsilon}$, on voit que tous les termes de la première ligne se reproduisent multipliés par $(\delta u+\varepsilon)^{2n\mu}$, d'après (6); il n'en est pas de même des termes de la seconde ligne (nouvelle), mais si l'on retranche de chacun d'eux le terme correspondant de la première (nouvelle), multiplié par le facteur $2n\mu\delta(\delta u+\varepsilon)$, on voit que les termes de la seconde ligne (nouvelle) deviennent

$$\varphi_1'(u)(\delta u+\varepsilon)^{2(n\mu+1)}\ \ldots\ \varphi_\rho'(u)(\delta u+\varepsilon)^{(2n\mu+1)}.$$

Ils reproduisent donc les termes de la seconde ligne primitive multipliés par $(\delta u+\varepsilon)^{2(n\mu+1)}$.

Ce raisonnement s'applique évidemment aux lignes suivantes, et l'on voit que le déterminant $F\left(\frac{\beta u+\gamma}{\delta u+\varepsilon}\right)$ reproduit le déterminant $F(u)$; seulement les termes de la première ligne de $F(u)$ y sont multipliés par $(\delta u+\varepsilon)^{2n\mu}$, et en général ceux de la $q^{\text{ième}}$, par $(\delta u+\varepsilon)^{2(n\mu+q-1)}$: par suite $F\left(\frac{\beta u+\gamma}{\delta u+\varepsilon}\right)$ est égal à $F(u)$, multiplié par le facteur $(\delta u+\varepsilon)$, élevé à la puissance :

$$2n\mu+2(n\mu+1)+\ldots+2(n\mu+\rho-1),$$

c'est-à-dire

$$2n\mu\rho+\rho(\rho-1).$$

En d'autres termes $F(u)$ est une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre $n\mu\rho+\frac{1}{2}\rho(\rho-1)$, de même groupe que les fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4.

Le nombre des zéros de $F(u)$ est donc, d'après 2°, égal à

$$[2\mu n\rho+\rho(\rho-1)](p-1),$$

mais ce nombre ne représente pas celui des solutions de la question géométrique, parce que, parmi les zéros, figurent les quantités ω_1, $\omega_2,\ldots\omega_k$, qu'on doit en retrancher. Or les termes de la première ligne de $F(u)$

admettent, comme on l'a dit, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ comme zéros multiples d'ordre n; ceux de la seconde ligne les admettent au degré $n-1$, et ainsi de suite; on en conclut aisément, par des considérations d'algèbre très simples, que $F(u)$ admet chacun de ces k zéros au degré ρn; par conséquent les autres zéros de $F(u)$ sont au nombre de

$$2\mu n\rho(p-1)+\rho(\rho-1)(p-1)-k\rho n,$$

c'est-à-dire, puisque le degré m, de C, est $2\mu(p-1)-k$,

$$mn\rho+\rho(\rho-1)(p-1).$$

Ainsi :

I. — *Le nombre des surfaces d'un système linéaire d'ordre n, $\rho-1$ fois infini, qui ont avec une courbe d'ordre m et de genre p, un contact d'ordre $\rho-1$ en un point, est égal à*

$$mn\rho+\rho(\rho-1)(p-1).$$

Si les surfaces du système passent toutes par q points fixes (distincts ou confondus) *de la courbe C*, le raisonnement fait plus haut pour les zéros $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ montre que *le nombre précédent doit être diminué de $q\rho$*, si l'on exclut les surfaces pour lesquelles le point de contact avec C est un de ces points fixes.

Dans tout ce qui précède, on suppose essentiellement que la courbe C n'a pas d'autres points singuliers que des points multiples à tangentes distinctes.

Enfin, une autre modification doit être introduite dans la formule si quelqu'une des surfaces du système passe par la courbe : si, en effet, les fonctions $\varphi_1(u), \varphi_2(n), \ldots \varphi_k(u)$, sont identiquement nulles, c'est-à-dire si les surfaces du système

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_k\varphi_k=0$$

passent par la courbe C, l'équation (3) se réduit à

$$\alpha_{k+1}\varphi_{k+1}(u)+\alpha_{k+2}\varphi_{k+2}(u)+\ldots+\alpha_\rho\varphi_\rho(u)=0$$

et, le nombre des paramètres α n'étant plus que $\rho - b$, on pourra seulement établir un contact d'orde $\rho - b - 1$: la formule reste alors vraie en remplaçant ρ par $\rho - b$; on peut dire que :

II. — *Si b surfaces du système, linéairement distinctes, passent par la courbe C, le nombre des points de C où une surface du système a un contact d'ordre $\rho - b - 1$ avec la courbe, sans la contenir toute entière, est égal à*

$$mn(\rho - b) + (\rho - b)(\rho - b - 1)(p - 1).$$

Exemples. — Le nombre des plans stationnaires d'une courbe gauche d'ordre m et de genre p est $4m + 12(p - 1)$; le nombre des points *décitactiques*, c'est-à-dire des points où une quadrique a un contact du neuvième ordre avec la courbe, est $20m + 90(p - 1)$, si la courbe n'est pas sur une quadrique. Si elle est sur une quadrique, le nombre des points où une quadrique a un contact d'ordre huit avec elle, sans la contenir toute entière, est $18m + 72(p - 1)$. Si la courbe est sur deux quadriques (biquadratique gauche) le nombre des points où une quadrique a un contact d'ordre sept avec elle, sans la contenir toute entière, est égal à $16m + 56(p - 1)$, ou, puisque $m = 4$, $p = 1$, égal à 64: résultat qui concorde avec celui que donne la théorie des fonctions elliptiques.

Le nombre des *sommets* d'une courbe gauche, c'est-à-dire des points où la sphère osculatrice a un contact d'un ordre supérieur au troisième, est de même $10m + 20(p - 1)$, si la courbe n'est pas sur une sphère.

Palerme, 26 janvier 1890.

Georges Humbert.

SULLA DETERMINAZIONE DEGLI OMBELICHI

DELLE SUPERFICIE TETRAEDRICHE;

di **Ernesto Lebon**,

prof. di Matematiche nel Liceo Carlomagno di Parigi, redattore capo del *Bulletin scientifique*.

(RIASSUNTO DELL'AUTORE).

Adunanza del 23 febbrajo 1890.

L'Accademia delle Scienze di Parigi aveva proposto come argomento del Concorso pel gran premio delle scienze matematiche, nell'anno 1886, la seguente questione:

Studiare le superficie che ammettono tutti i piani di simmetria di uno dei poliedri regolari.

In un opuscolo (*) ho fatto il sunto di quella parte dei miei lavori su questo argomento che dipende soltanto dalla Geometria analitica. Riassumo qui le mie ricerche relative agli *ombelichi* delle superficie tetraedriche S_3 che ammettono i sei piani di simmetria d'un tetraedro regolare, detto *direttore*, la cui equazione è

$$(1) \qquad 0 = a + b(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz,$$

(*) « *Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du cube* ». Estratto dal *Journal de Mathématiques spéciales* (P. 48 p. in-8°). — Veggasi bensì: *Mathesis*, fascicolo di febb

e che dividonsi in quattro generi, in ordine alle seguenti condizioni:

Genere 1: $a > 0$, $b > 0$;

Genere 2: $a < 0$, $b > 0$, $a - b^3 > 0$;

Genere 3: $a < 0$, $b > 0$, $a + b^3 = 0$;

Genere 4: $a < 0$, $b > 0$, $a + b^3 < 0$.

Per trovare gli ombelichi delle S_3, basta risolvere i due sistemi formati dalla equazione (1) e

1° dalle equazioni

$$x^2 = y^2, \tag{2}$$

$$y^2 = z^2; \tag{3}$$

2° dalle equazioni (2) e

$$0 = b^3(x^2 + y^2 + z^2) + 3b^2xyz + bx^2(x^2 + y^2 + z^2) + x^3yz. \tag{4}$$

Al sistema delle equazioni (1), (2) e (3) corrispondono degli ombelichi sulle quattro altezze del tetraedro direttore di S_3; *detti ombelichi sono in numero di: uno pei generi 1 e 4; tre pel genere 2; i loro centri di curvatura sono sulle altezze del tetraedro direttore.*

Il sistema delle equazioni (1), (2) e (4) conduce alle tre seguenti equazioni:

$$0 = a + 2bx^2 + bz^2 + 2x^2z, \tag{5}$$

$$0 = b^2z + 2bx^2 + zx^2, \tag{6}$$

$$0 = bz + x^2; \tag{7}$$

che formano due sistemi, composti, l'uno dalle equazioni (5) e (6), l'altro dalle equazioni (5) e (7).

Dal primo sistema si deduce l'equazione

$$(8) \qquad 0 = bz^3 + (a - 2b^3)z + 2ab.$$

Discutendo quest' ultima equazione si vede facilmente che *il numero degli ombelichi, dati dalle equazioni* (5) *e* (6), *è due o quattro, secondo che la S_3 appartiene al genere* 1 *ovvero al genere* 2.

Si riconosce inoltre che al sistema delle equazioni (5) e (7) non corrisponde alcun ombelico.

E finalmente, per la S_3 del genere 3, da me nominata *tetraedroide*, si ha questo teorema:

Il tetraedroide possiede quattro ombelichi, che sono i punti, all'infuori dei vertici del tetraedro inscritto, in cui le altezze di quest'ultimo incontrano il tetraedroide. I loro centri di curvatura sono i vertici del tetraedro inscritto, opposti agli ombelichi.

Parigi, 18 febbrajo 1890.

E. LEBON.

SOPRA IL SISTEMA DI QUADRICHE

CHE HANNO L'n-PLA POLARE COMUNE;

Nota di **Cesare Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 26 gennajo 1890.

1. L'equazione di una delle $(\infty)^{n-1}$ quadriche del sistema è $\sum_1^n g_i x_i^2 = 0$, essendo x le coordinate omogenee degli S_0, di uno spazio lineare S_{n-1} ad $n-1$ dimensioni, riferite all'n-pla polare di tutte le quadriche del sistema.

Le g possono esser considerate come coordinate omogenee dei punti di un S'_{n-1} la cui n-pla fondamentale sia arbitraria. Indicheremo con S^*_r gli spazi ad r dimensioni appartenenti all'n-pla fondamentale di S'_{n-1} e ricorderemo che:

Esistono $\binom{n}{r+1}$ *spazi* S^*_r; *per un* S^*_r *passano* $\binom{n-r-1}{s-r}$ *spazi* S^*_s.

Per il discriminante Δ della quadrica del sistema abbiamo $\Delta = g_1 g_2 \ldots g_n$, e quindi la varietà $\Delta = 0$ è dell'ordine n e si spezza negli S^* dell'n-pla fondamentale di S'_{n-1}.

Una condizione Θ_{s-1}, esprimente il contatto della quadrica del sistema con un S_{s-1}, ha un'equazione della forma

$$\Theta_{s-1} = \sum \lambda g_1 g_2 \ldots g_s u^2$$

essendo u le $\binom{n}{s}$ coordinate dell'S_{s-1}. Quando le u sono date, $\Theta_{s-1} = 0$

è l'equazione di una varietà di ordine s ad $n-2$ dimensioni, contenuta nell'S'_{n-1}. È facile vedere che: *la varietà* $\Theta_{s-1}=0$ *contiene tutti gli* S^*_{s-r} *alla molteplicità* $r-1$ $(r=2, 3, \ldots s)$.

2. Indichiamo con ε_s il numero degli S_s a cui devono esser tangenti le quadriche del sistema, e con $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ la caratteristica generica del sistema stesso. Esistono $\binom{2n-3}{n-1}$ caratteristiche del sistema, delle quali $\binom{n-2}{\frac{n}{2}-1}$ (prendendo di $\frac{n}{2}$ la parte intera) corrispondono a se stesse: avendosi poi

$$(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}) = (\varepsilon_{n-2}, \ldots \varepsilon_1, \varepsilon_0)$$

non avremo da calcolare effettivamente che

$$\frac{1}{2}\left\{\binom{2n-3}{n-1}+\binom{n-2}{\frac{n}{2}-1}\right\}$$

caratteristiche.

3. Si potrà determinare il numero $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-2})$, cercando gli ordini delle successive intersezioni delle Θ, a partire dalle Θ_{n-2}, avendo cura di togliere da ogni intersezione gli S^* che si staccano, e ridurre anche le molteplicità degli S^* rimanenti.

Se poniamo

$$e_s = \varepsilon_s + \varepsilon_{s+1} + \ldots + \varepsilon_{n-2} \tag{1}$$

e supponiamo che, essendo $\varepsilon_s > 0$, si abbia $e_s \geqq n-s$, è chiaro che prese $n-s$ delle Θ, a partire dalle Θ_{n-2}, dall'intersezione Φ_{s-1} di queste si staccheranno gli S^*_{s-1}; dall'intersezione di Φ_{s-1} con un'altra delle Θ_s, si staccheranno gli S^*_{s-2}, e così di seguito. Viceversa, se vogliamo che prese $n-s$ delle Θ si stacchino dall'intersezione gli S^*_{s-1}, bisognerà che si abbia $\varepsilon_s > 0$ e $e_s \geqq n-s$. Dunque:

Determinando le successive intersezioni delle Θ, *a partire dalle* Θ_{n-2}, *si troverà che si staccano degli* S^* *adoperando quelle* Θ_s *per le quali (essendo evidentemente* $\varepsilon_s > 0$) *si ha* $e_s \geqq n-s$.

4. Supponiamo ora che essendo $\varepsilon_s > 0$ ed $e_s > n - s$ l'interse-
ne Φ_s di $n - s - 1$ delle Θ, contenga gli S^*_b $(b = 0, 1, \ldots s-1)$
ı molteplicità α_{s-b-1} (ridotta o no secondo che s non è od è il più
nde dei valori di s per il quale si ha $e_s \geqq n - s$). L'intersezione di
con una delle rimanenti Θ_s è una varietà Φ_{s-1} da cui si staccano
S^*_{s-1}, α_0-pli, e per la quale gli S^*_b rimangono multipli secondo
$-b)\alpha_{s-b-1}$ diminuito del prodotto di α_0 per il numero degli S^*_{s-1}
: passano per S^*_b. Lo stesso dicasi per le successive intersezioni con
rimanenti Θ_s.

Indichiamo allora con $I_{r,b}$ la molteplicità ridotta degli S^*_{s-b-1} ap-
tenenti alla Φ_{s-r}, intersezione di Φ_s con r delle rimanenti $\Theta_s (I_{r,b} = 0$
$b < r)$. Avremo

$$I_{r,b} = (b+1) I_{r-1,b} - r I_{r-1,r-1} \binom{n-s+b}{b-r+1}$$

: vale anche per $r = 1$ quando si ponga

$$I_{0,b} = \alpha_b.$$

icando con v_r l'ordine (ridotto) di Φ_{s-r}, avremo

$$v_r = (s+1) v_{r-1} - r I_{r-1,r-1} \binom{n}{s-r+1}.$$

Ponendo nella (2), $b = s$ deduciamo subito che:

Facendo variare nelle $I_{r,b}$, *e* α_b, *l'indice* b *fino ad* s *in luogo che*
ı *ad* $s - 1$, *e ponendo* $\alpha_s = v_0$ *si ha* $I_{r,s} = v_r$ (*).

Dalle (2) si ha facilmente

$$I_{r,b} = (b+1)^r \alpha_b - \sum_{0}^{r-1}{}_q (-1)^q (r-q)^r \binom{b-1}{q} \binom{n-s+b}{b-r+q+1} \alpha_{r-q-1}$$

(*) Supponendo che il sistema che si considera sia in uno spazio ad $n+m$-
ensioni e che per esso si abbia $e_{s+m} \geqq (n+m) - (s+m)$ si ottengono ancora
2) per le I, e quindi se per il sistema ad $n - 1$ dimensioni si hanno le mede-
: α (da α_0 ad α_{s-1}) che per il sistema ad $n + m - 1$ dimensioni, le $I_{r,b}$ di que-
contengono tutte le I di quello, e anzi le $I_{r,s}$ del sistema ad $n + m - 1$ dimen-
i sono eguali alle v_r del sistema ad $n - 1$ dimensioni se l'α_s di quello è eguale
$_0$ di questo.

e quindi, ponendo in questa $h = s$, $\alpha_s = v_0$,

$$(5)\qquad v_r = (s+1)^r v_0 - \sum_0^{r-1} {}_q (-1)^q (r-q)^r \binom{s-1}{q} \binom{n}{s-r+q+1} \alpha_{r-q-1}.$$

In particolare per $s = n-2$ si ha

$$(6)\qquad I_{r,h} = \binom{h+1}{r+1}; \qquad v_r = \binom{n-1}{r+1}$$

che valgono anche per $r = 0$.

5. Le formule (4) e (5) potranno essere adoperate in pratica per calcolare le caratteristiche del sistema, nel modo seguente. Determiniamo i valori $p, q, r, \ldots$ ($p > q > r > \ldots$) di s che sodisfano alle condizioni $\varepsilon_s > 0$, $e_s \geqq n - s$, supposto che p sia il più grande di tali valori. La Φ_p, intersezione di $n - p - 1$ delle Θ (tra le quali vi è almeno una delle Θ_p) sarà dell'ordine

$$(p+1)^{p'}(p+2)^{e_{p+1}} \ldots (n-2)^{e_{n-3}}(n-1)^{e_{n-2}}$$

se per ottenere Φ_p si sono prese p' delle Θ_p; e conterrà gli S^*_h ($h = 0, 1, \ldots p-1$) alla molteplicità

$$(p-h)^{p'}(p-h+1)^{e_{p+1}} \ldots (n-h-3)^{e_{n-3}}(n-h-2)^{e_{n-2}}.$$

Le formule (4) e (5) dànno l'ordine v della Φ_{n-e_p-1} e le molteplicità $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{n-e_p-2}$ alle quali contiene gli $S^*_0 S^*_1 \ldots S^*_{n-e_p-2}$.

Fatto ciò si passa alle Θ_q. Se occorre prendere q' delle Θ_q perchè con le altre e_{q+1} Θ se ne siano prese $n-q-1$, l'ordine di Φ_q sarà

$$v(q+1)^{q'}(q+2)^{e_{q+1}} \ldots (p+1)^{e_{p-2}} p^{e_{p-1}}.$$

e Φ_q conterrà gli S^*_h ($h = 0, 1, \ldots q-1$) alle molteplicità

$$\beta_h . (q-h)^{q'} . (q-h+1)^{e_{q+1}} \ldots (p-h-2)^{e_{p-2}}(p-h-1)^{e_{p-1}}$$

e si applicheranno ancora le (4) e (5), etc.

6. Quando per nessun valore di s si ha $e_s \geqq n - s$ allora

$$(7) \qquad (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-2}) = 2^{\varepsilon_1} . 3^{\varepsilon_2} \ldots (n-1)^{\varepsilon_{n-2}}.$$

Quando è 1 il più grande valore di s che soddisfa alla cond $e_s \geqq n - s$, (si ha in tal caso $\varepsilon_0 = 0$ $e_1 = n - 1$, ma questa zione non è sufficiente), allora

$$(8) \quad (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-2}) = 2^{\varepsilon_1} . 3^{\varepsilon_2} \ldots . (n-1)^{\varepsilon_{n-2}} - n . 2^{\varepsilon_2} . 3^{\varepsilon_3} \ldots . (n -$$

Se $\varepsilon_s = n - 1$ allora dalla (5) si ha

$$(9) \qquad (0, 0, \ldots 0, \varepsilon_s, 0, \ldots 0) = (s+1)^{n-1}$$

$$- \sum_0^{s-1}{}_q (-1)^q (s-q)^{n-1} \binom{s-1}{q} \binom{n}{q+1}.$$

Diamo ora i valori delle caratteristiche del sistema per $n = 3, 4,$ segnando con un asterisco quelle per le quali è applicabile la (

$n = 3$

$\begin{vmatrix} 20 \\ 02 \end{vmatrix}^* = 1 \qquad | 11 |^* = 2$

$n = 4$

$\begin{vmatrix} 300 \\ 003 \end{vmatrix}^* = 1; \begin{vmatrix} 210 \\ 012 \end{vmatrix}^* = 2; \begin{vmatrix} 201 \\ 102 \end{vmatrix}^* = 3; \begin{vmatrix} 120 \\ 021 \end{vmatrix}^* = 4; | 111 |^* = 6; |$

$n = 5$

$\begin{vmatrix} 4000 \\ 0004 \end{vmatrix}^* = 1; \begin{vmatrix} 3100 \\ 0013 \end{vmatrix}^* = 2; \begin{vmatrix} 3010 \\ 0103 \end{vmatrix}^* = 3; \begin{vmatrix} 3001 \\ 1003 \end{vmatrix}^* = 4; \begin{vmatrix} 2200 \\ 0022 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2110 \\ 0112 \end{vmatrix}^* = 6; \begin{vmatrix} 2101 \\ 1012 \end{vmatrix}^* = 8; \begin{vmatrix} 2020 \\ 0202 \end{vmatrix}^* = 9; \begin{vmatrix} 2011 \\ 1102 \end{vmatrix}^* = 12; \begin{vmatrix} 1300 \\ 0031 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1210 \\ 0121 \end{vmatrix}^* = 12; \begin{vmatrix} 1201 \\ 1021 \end{vmatrix}^* = 16; \begin{vmatrix} 1120 \\ 0211 \end{vmatrix}^* = 18; \begin{vmatrix} 1030 \\ 0301 \end{vmatrix} = 17; \begin{vmatrix} 0400 \\ 0040 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0310 \\ 0130 \end{vmatrix} = 14; | 0220 | = 16; | 1111 |^* = 24; | 2002 | = 6$

$n = 6$

$\begin{vmatrix} 50000 \\ 00005 \end{vmatrix}^* = 1; \begin{vmatrix} 41000 \\ 00014 \end{vmatrix}^* = 2; \begin{vmatrix} 40100 \\ 00104 \end{vmatrix}^* = 3; \begin{vmatrix} 40010 \\ 01004 \end{vmatrix}^* = 4; \begin{vmatrix} 40001 \\ 10004 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 32000 \\ 00023 \end{vmatrix}^* = 4; \begin{vmatrix} 31100 \\ 00113 \end{vmatrix}^* = 6; \begin{vmatrix} 31010 \\ 01013 \end{vmatrix}^* = 8; \begin{vmatrix} 31001 \\ 10013 \end{vmatrix}^* = 10; \begin{vmatrix} 30200 \\ 00203 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}30110\\01103\end{vmatrix}^{*}=12$;	$\begin{vmatrix}30101\\10103\end{vmatrix}^{*}=15$;	$\begin{vmatrix}30020\\02003\end{vmatrix}^{*}=16$;	$\begin{vmatrix}30011\\11003\end{vmatrix}^{*}=20$;	$\begin{vmatrix}30002\\20003\end{vmatrix}=10$
$\begin{vmatrix}23000\\00032\end{vmatrix}^{*}=8$;	$\begin{vmatrix}22100\\00122\end{vmatrix}^{*}=12$;	$\begin{vmatrix}22010\\01022\end{vmatrix}^{*}=16$;	$\begin{vmatrix}22001\\10022\end{vmatrix}^{*}=20$;	$\begin{vmatrix}21200\\00212\end{vmatrix}^{*}=18$
$\begin{vmatrix}21110\\01112\end{vmatrix}^{*}=24$;	$\begin{vmatrix}21101\\10112\end{vmatrix}^{*}=30$;	$\begin{vmatrix}21020\\02012\end{vmatrix}^{*}=32$;	$\begin{vmatrix}21011\\11012\end{vmatrix}^{*}=40$;	$\begin{vmatrix}21002\\20012\end{vmatrix}=20$
$\begin{vmatrix}20300\\00302\end{vmatrix}^{*}=27$;	$\begin{vmatrix}20210\\01202\end{vmatrix}^{*}=36$;	$\begin{vmatrix}20201\\10202\end{vmatrix}^{*}=45$;	$\begin{vmatrix}20120\\02102\end{vmatrix}^{*}=48$;	$\begin{vmatrix}20111\\11102\end{vmatrix}^{*}=60$
$\begin{vmatrix}20030\\03002\end{vmatrix}=44$;	$\begin{vmatrix}20021\\12002\end{vmatrix}=40$;	$\begin{vmatrix}14000\\00041\end{vmatrix}^{*}=16$;	$\begin{vmatrix}13100\\00131\end{vmatrix}^{*}=24$;	$\begin{vmatrix}13010\\01031\end{vmatrix}^{*}=32$
$\begin{vmatrix}13001\\10031\end{vmatrix}^{*}=40$;	$\begin{vmatrix}12200\\00221\end{vmatrix}^{*}=36$;	$\begin{vmatrix}12110\\01121\end{vmatrix}=48$;	$\begin{vmatrix}12101\\10121\end{vmatrix}^{*}=60$;	$\begin{vmatrix}12020\\02021\end{vmatrix}^{*}=64$
$\begin{vmatrix}12011\\11021\end{vmatrix}^{*}=80$;	$\begin{vmatrix}11300\\00311\end{vmatrix}^{*}=54$;	$\begin{vmatrix}11210\\01211\end{vmatrix}^{*}=72$;	$\begin{vmatrix}11201\\10211\end{vmatrix}^{*}=90$;	$\begin{vmatrix}11120\\02111\end{vmatrix}^{*}=96$
$\begin{vmatrix}11030\\03011\end{vmatrix}=88$;	$\begin{vmatrix}10400\\00401\end{vmatrix}=66$;	$\begin{vmatrix}10310\\01301\end{vmatrix}=78$;	$\begin{vmatrix}10220\\02201\end{vmatrix}=84$;	$\begin{vmatrix}10130\\03101\end{vmatrix}=72$
$\begin{vmatrix}10040\\04001\end{vmatrix}=56$;	$\begin{vmatrix}05000\\00050\end{vmatrix}=26$;	$\begin{vmatrix}04100\\00140\end{vmatrix}=36$;	$\begin{vmatrix}04010\\01040\end{vmatrix}=46$;	$\begin{vmatrix}03200\\00230\end{vmatrix}=48$
$\begin{vmatrix}03110\\01130\end{vmatrix}=60$;	$\begin{vmatrix}03020\\02030\end{vmatrix}=74$;	$\begin{vmatrix}02300\\00320\end{vmatrix}=60$;	$\begin{vmatrix}02210\\01220\end{vmatrix}=72$;	$\begin{vmatrix}01400\\00410\end{vmatrix}=66$
$\vert 20102\vert=30$;	$\vert 11111\vert^{*}=120$;	$\vert 10301\vert=90$;	$\vert 01310\vert=72$;	$\vert 00500\vert=66$
		$\vert 02120\vert=84$ (*)		

Torino, gennajo 1890.

CESARE BURALI-FORTI.

(*) Il metodo indicato dal sig. Halphen per la determinazione delle caratteristiche dei sistemi $(\infty)^1$ di coniche e di quadriche (Journal de l'École Polytechnique, XLV. c.), e da me esteso ai sistemi $(\infty)^i$ di coniche e di quadriche (Giornale di Matematiche, vol. XXVII) può essere facilmente esteso anche ai sistemi $(\infty)^i$ di quadriche in uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni. Farò soltanto vedere come le *caratteristiche della condizione*, possano ottenersi e darò l'espressione dell'ordine infinitesimale minimo della condizione.

Una delle quadriche del sistema, riferita ad una delle sue n-ple polari, avrà una equazione della forma $\sum g_i x_i^2 = 0$, ove le g sono funzioni omogenee e razionali di $i+2$ variabili legate da una relazione che è l'equazione della varietà *base* ad i dimensioni. La condizione Θ può porsi sotto la forma (*vedi* Halphen l. c.) $\Theta = \sum A g_1^{\pi_1} g_2^{\pi_2} \ldots g_n^{\pi_n} = 0$ e in essa esistono $n!$, o $\frac{n!}{r!\,s!\,t!}$ se $r, s, t, \ldots$ delle π sono eguali, termini che hanno i medesimi esponenti π. Indicheremo questi termini con $(\pi_1\ \pi_2 \ldots \pi_n)$ supposto che

si abbia $\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \pi_3 \geqq \ldots \geqq \pi_n$; con $(\pi'_1 \pi'_2 \ldots \pi'_n)$ il termine corris
nella condizione duale Θ', supposto sempre $\pi'_1 \geqq \pi'_2 \geqq \ldots \geqq \pi'_n$.

Se con c, c' indichiamo gli ordini di Θ, Θ', rispettivamente, avremo

$$c = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n; \qquad c' = \pi'_1 + \pi'_2 + \ldots + \pi'_n \tag{1}$$

Poniamo

(2) $\alpha_r =$ minimo di $(\pi_{r+1} + \pi_{r+2} + \ldots + \pi_n)$; $\quad \alpha'_r =$ minimo di $(\pi'_{r+1} + \cdot$
ritenendo $\alpha_0 = c$, $\alpha'_0 = c'$ e $\alpha_m = \alpha'_m = 0$ per $m \geqq n-1$.

Si passa dalla Θ alla Θ' cambiando g in $\frac{1}{g}$, quindi per le (1) e (2)

$$\pi_s = c' - \pi'_{n-s+1} - \alpha'_1; \qquad \pi'_s = c - \pi_{n-s+1} - \alpha_1. \tag{3}$$

Sommando le ultime $n-r$ delle (3) e tenendo conto delle (2) si h

$$\alpha_{n-r} = (r-1)c' - r\alpha'_1 + \alpha'_r; \qquad \alpha'_{n-r} = (r-1)c - r\alpha_1 + \alpha \tag{4}$$

dalle quali, introducendo i numeri β, si ha

$$\beta_r = \alpha_{r-1} - 2\alpha_r + \alpha_{r+1} = \alpha'_{n-r-1} - 2\alpha'_{n-r} + \alpha'_{n-r+1}. \tag{5}$$

La β_r corrisponde dualisticamente a β_{n-r}, e delle β ne abbiamo $n-$
a $r = n-1$). In particolare si ha $\beta_1 = \alpha'_{n-2}$, $\beta_{n-1} = \alpha_{n-2}$.

Dalle (5) si ha

$$\begin{cases} \alpha_r = \beta_{r+1} + 2\beta_{r+2} + \ldots + (n-r-1)\beta_{n-1} \\ \alpha'_r = \beta_{n-r-1} + 2\beta_{n-r-2} + \ldots + (n-r-1)\beta_1 \end{cases} \tag{6}$$

che mostrano non essere le $2(n-1)$, α indipendenti tra loro.

Poniamo

$$P_r = \pi_{r+1} + \ldots + \pi_n; \qquad P'_r = \pi'_{r+1} + \ldots + \pi'_n; \tag{7}$$

dalle (3) e dalla prima delle (4) si ha, introducendo i numeri τ,

$$\tau_r = P_r - \alpha_r = P'_{n-r} - \alpha'_{n-r}. \tag{8}$$

I numeri τ sono $n-1$ (da $r=1$ a $r=n-1$) e a τ_r corrispon
camente τ_{n-r}. In particolare si ha $\tau_1 = \pi'_n$; $\tau_{n-1} = \pi_n$.

Dalle (5) e (8) si ha

$$\alpha_{r-1} - \alpha_r = \beta_r + \beta_{r+1} + \ldots + \beta_{n-1}$$
$$\pi_r = \tau_{r-1} - \tau_r + \alpha_{r-1} - \alpha_r$$

e quindi

$$\begin{cases} \pi_r = \tau_{r-1} - \tau_r + \beta_r + \beta_{r+1} + \ldots + \beta_{n-1} \\ \pi'_r = \tau_{n-r-1} - \tau_{n-r} + \beta_{n-r} + \beta_{n-r-1} + \ldots + \beta_1. \end{cases} \tag{9}$$

Dunque: dati i numeri c e c' sono determinate le β, e dati i nume
sono determinati le π.

Diremo le β *caratteristiche della condizione* e le τ *caratteristiche dei*
Indichiamo ora con $p + m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-r}$ l'ordine infinitesimale

$g_r : g_n$, supposto $m_0 = 0$ e p l'ordine dell'infinitesimale comune a tutte le g. L'ordine infinitesimale di Θ è $w =$ minimo di $\{\pi_n(p+m_1+\ldots+m_{n-1})+\ldots+\pi_2(p+m_1)+\pi_1 p\}$ e se poniamo

$$l = \text{minimo di } \{m_1\tau_1 + m_2\tau_2 + \ldots + m_{n-1}\tau_{n-1}\}$$

avremo

$$w = pc + \sum_0^{n-1} m_r\alpha_r + l.$$

Se Θ esprime un contatto con un S_{r-1}, per i numeri c, α, β, τ abbiamo

$$c = s \qquad c' = n - s$$

$$\alpha_r = s - r \text{ per } r \leqq s, \quad \alpha_r = 0 \text{ per } r > s$$

$$\alpha'_r = n - s + r \text{ per } r \leqq n - s; \quad \alpha'_r = 0 \text{ per } r > n - s$$

$$\beta_s = 1; \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{s-1} = \beta_{s+1} = \ldots = \beta_{n-1} = 0$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n-1} = 0.$$

SUL GENERE DELLE CURVE Ω NELLE INVOLUZIONI PIANE DI CLASSE QUALUNQUE; (*)

Nota II^a del prof. V. **Martinetti**, in Messina.

Adunanza del 23 febbrajo 1890.

12. Si supponga $\Delta = 2$.

Se le Φ non sono tutte unite, si dovranno avere in $[\Phi]$ due sistemi lineari $[\Phi_1]$, $[\Phi_2]$ di curve unite, rispettivamente a $c+\gamma+1-m$, m dimensioni, essendo $m \leqq 1$ (n° 6).

$[\Phi_2]$, per $m = 1$, deve essere un fascio di curve contenenti, come parte fissa, la Γ e le rette unite della involuzione. Togliendo da queste Φ_2 le rette unite e la Γ, rimangono curve variabili in un fascio, uscenti dai punti fondamentali colle direzioni comuni a tutte le Φ (n° 7), e segate, in particolare, dalle Ω in una sola coppia di punti variabili fra loro corrispondenti. E ciò è impossibile, perchè tali curve non potrebbero contenere una parte comune, dovrebbero essere al massimo di 3° ordine (perchè ciascuna è parte di una Ω, ed è segata dalle altre Ω in una sola coppia di punti variabili) e ciò non è conciliabile col fatto, che le curve stesse hanno due coppie di direzioni fisse.

Supponiamo perciò $m = 0$. $[\Phi_2]$ rappresenta una sola curva contenente Γ, le rette unite, ed una curva C d'ordine K (parte di una Ω),

(*) Questa Nota è la continuazione dell'altra, dallo stesso titolo, inserita in questi *Rendiconti*, tomo IV (1890), fasc. 1-2, pp. 30-42.

la quale non può essere fondamentale. Infatti se essa corrispondesse al punto fondamentale 1, la Φ_2 avrebbe in 1 una molteplicità superiore di una unità a quella delle Φ, e sarebbe segata da queste, fuori dei punti base, in un solo punto variabile; di più nel punto 1 dovrebbero esservi le quattro tangenti comuni alle Ω, per la qualcosa si avrebbe $\alpha_{11} - \lambda_1 = 4$; $\theta_1 = 5$: Inoltre, non essendo $\varepsilon_1 = 0$ (n° 9), la Ω_1 non potrebbe essere formata dalla sola C e da rette unite, quindi $\alpha_{11} + \lambda_1 \leqq 5$, ed allora si avrebbe:

$$\lambda_1 = 0, \quad \alpha_{11} = 4, \quad r_1 = 5, \quad \alpha_{i1} \leqq 1 \text{ per } i > 1$$

e per questo gli altri punti fondamentali 2, 3,... sarebbero al più doppi per l'involuzione, sicchè dovrebbe essere $n \leqq 7$ mentre, avendosi $\varepsilon_1 > 0$, $r_1 = \nu + 2 - \varepsilon_1 = 5$, sarebbe $\nu > 3$, il che è assurdo.

Se indichiamo con s_i la molteplicità della C nel punto base i, pei punti uniti isolati della involuzione sarà $s_i = 2$, ovvero $s_i = 1$, ovvero $s_i = 0$; siano allora u_1, u_2, u_3 il numero dei punti uniti che presentano ordinatamente questi tre casi.

Tutte le Φ_1 passanti per due punti arbitrarii di C (e sono $\infty^{b+\pi-1}$) si spezzano nella C ed in una residua curva d'ordine $2\nu + 1 - K$ passante pel punto base i $\theta_i - s_i$ volte, eccetto che per gli u_1 punti uniti doppi per C pei quali passa $\theta_i - s_i + 1$ volte (pei quali cioè non passa).

Due qualunque di queste curve si segano fuori dei punti base in

$$(2\nu + 1 - K)^2 - \sum_{i=1}^{b+\pi+2\Delta} (\theta_i - s_i)^2 + u_1 = 2\nu - 4 - \left(\sum_{i=1}^{b+\pi+2\Delta} s_i^2 - K^2 - u_1 \right)$$

punti $\left[\text{avendosi } \sum_{i=1}^{b+\pi+2\Delta} s_i \theta_i = K(2\nu + 1) - 2\right]$ divisi in

$$\nu - 2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{b+\pi+2\Delta} s_i^2 - K^2 - u_1 \right)$$

coppie di punti corrispondenti.

Il nostro intento è di dimostrare che per $\Delta = 2$ si ha sempre

$$p \geqq \nu + 2.$$

Ora se è

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{b+\pi+2\Delta} s_i^2 - K^2 - u_1 \right) \geqq 3$$

ossia (dovendo il primo membro essere un numero intero)

$$\sum_{1}^{h} s_i^2 - K^2 + 3u_1 + u_2 \geqq 1; \qquad \alpha)$$

ed insieme $c + \gamma - 2 > 0$ si trova appunto, col ragionamento più volte usato, $p \geqq \nu + \gamma + 2$.

Quindi se dimostriamo, che anche quando non sia verificata la relazione α), ovvero non sia $c + \gamma - 2 > 0$, è tuttavia $p \geqq \nu + 2$, potremo concludere che quest'ultima relazione è vera quando le [Φ] non siano tutte unite.

Per brevità, non considereremo in seguito che il caso $\nu > 4$, e supporremo ancora che l'involuzione non sia di Jonquières, perchè nel caso contrario si può verificare (*) che per $\Delta = 2$ è sempre

$$p = \nu + 2.$$

Allora possiamo anche supporre $c + \gamma - 2 > 0$ perchè, a cagione della (7), se fosse $c + \gamma - 2 \leqq 0$ dovrebbe essere:

$$p \geqq 2\nu + \gamma - 3$$

e quindi per $\nu > 4$ sarebbe sempre

$$p \geqq \nu + \gamma + 2.$$

13. La C dovendo uscire dai punti fondamentali con due coppie di direzioni date, ha certamente un punto quadruplo in un punto fondamentale, o due punti doppi in due di questi punti; deve inoltre essere unita, ed allora si vede subito che la relazione α) è soddisfatta per $K < 4$; ed è precisamente $K < 4$ se O, della cui Ω fa parte la C, non è nè fondamentale nè unito.

(*) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane*, l. c.
Martinetti, *Le involuzioni di* 3^a *e* 4^a *classe* (Annali di Matematica, serie II, tomo XII).

Se O è unito la C è al più di 4° ordine, perocchè essa ha al massimo un punto doppio in O, ed è segata in due soli punti variabili dalle Ω; si potrebbe anzi dimostrare che il solo caso $K = 4$ è possibile, ma poichè non ci interessa che il caso $K \geqq 4$, così poniamo senz'altro $K = 4$.

Le due coppie di tangenti comuni alle Φ devono uscire da due punti fondamentali separati, 1 e 2, i quali allora sono doppi per C, e questa passa poi al più semplicemente per gli altri punti fondamentali.

Dovendo essere:

$$r_1 + r_2 + \sum_{i=1}^{h} r_i \geqq 4(n-1),$$

viene

$$r_1 + r_2 \geqq n - 1.$$

Quindi, o la C passa per tutti i punti fondamentali, o passa per tutti uno eccettuato il quale è semplice e corrispondente alla $(12)_1$.

Nelle condizioni attuali possiamo supporre, che il numero dei punti fondamentali situati su C sia 8 almeno, perchè, se i punti fondamentali su C fossero meno di 8, dovendosi avere [considerando le cubiche $(1^2 234567)_3$, $(1\,2^2 34567)_3$]:

$$r_1 + \sum_{i=1}^{7} r_i \leqq 3n, \quad r_2 + \sum_{i=1}^{7} r_i \leqq 3n,$$

quindi:

$$r_2 \geqq n - 4, \; r_1 \geqq n - 4,$$

verrebbe sempre:

$$n \leqq 8, \; \nu \leqq 3.$$

Se poi i punti fondamentali sopra C non sono meno di 8, la α) è necessariamente soddisfatta.

14. Se O è fondamentale, non può essere un punto dal quale le Ω escano con direzioni fisse, perchè la C non è la curva fondamentale corrispondente ad O, ed allora non può uscire da O con quelle direzioni fisse, come dovrebbe essere.

Inoltre la C, avendo in O un punto $(K-2)$-uplo e non conte-

nendo rette unite, non può avere fuori di O che punti doppi al più, perciò le direzioni fisse delle Ω sono in punti fondamentali separati 1, 2. Per commodo chiamiamo 3 il punto O.

Non essendo le Φ unite deve essere $\varepsilon_i > 0$ per tutti i punti fondamentali (n° 9), per 3 in particolare deve essere $\varepsilon_3 > 1$, perchè si vede subito che la Ω di 3 non può esser composta soltanto della C, da rette unite e dalla curva fondamentale corrispondente a 3, perciò deve essere:

$$\theta_1 \leqq \nu, \quad \theta_2 \leqq \nu, \quad \theta_3 \leqq \nu - 2.$$

Questo dice che le rette $(13)_1$, $(23)_1$ non possono essere fondamentali (perchè non segate in un solo punto variabile dalle Ω) e che ad esse, qualora non passino per altri punti fondamentali, non possono corrispondere delle rette (cosa facile a riconoscersi), sicchè potremo porre in ogni caso:

$$r_1 + r_2 = n - \alpha_1, \; r_1 + r_3 = n - 2 - \alpha_2, \; r_2 + r_3 = n - 2 - \alpha_3,$$
$$(\alpha_i \geqq 0 \text{ per } i = 1, 2, 3).$$

Scrivendo che la C è unita, si trova:

$$r_1 + r_2 + (K - 3) r_3 + \sum_{i=1}^{h} r_i \geqq K(n - 1),$$
$$r_1 + r_2 \geqq (K - 3)(r_1 + 1 + \alpha_2);$$

dunque sarà $K \leqq 4$, e poichè noi vogliamo occuparci del solo caso $K \geqq 4$, così supporremo C del quarto ordine. Se essa passa soltanto pei punti 1, 2, 3, 4, ..., h', avremo:

$$\sum_{i=4}^{h'} r_i = n + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

quindi $h' \geqq 6$. D'altra parte per $h' \geqq 8$ la relazione α) è soddisfatta, perciò esaminiamo i casi $h' = 6$, $h' = 7$.

Per $h' = 6$ si ha:

$$r_1 + r_2 + r_4 + r_5 + r_6 = 2n + \alpha_2 + \alpha_3;$$

quindi $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e la conica $(12456)_2$ è fondamentale corrispon-

dente ad un punto sopra C. Questo punto od è 3, ovvero uno dei tre punti 4, 5, 6 ma in tal caso r_3 non potrebbe essere più che doppio. Allora $r_1 = n - 4$, $r_2 = n - 4$, $n \leqq 8$, $\nu \leqq 3$.

Per $h' = 7$ la C è una $(1_2^2 2_2^2 3^2 4 5 6 7)_4$,
e si ha:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \sum_{i=1}^{7} r_i = 4(n - 1),$$

quindi $$r_i \leqq 4 \text{ per } i > 7.$$

La curva fondamentale di un punto non situato sopra C non deve segare C fuori dei punti 1, 2, ... 7 e si vede subito allora, che solo quando un tal punto sia quadruplo può per esso passare (semplicemente) la sua curva corrispondente; segue che per tutti i punti fondamentali 8, 9 ... h non situati sopra C devono passare certamente delle rette unite, ne devono passare anzi $\theta_i - \lambda_i$, numero che per $r_i > 1$ è necessariamente > 1.

Una di queste rette unite, passante per un punto i pel quale sia $r_i > 1$ e che non contiene il punto 3 (e ve n'ha certamente una almeno), non deve segare la C fuori dei punti base (perchè C è parte di Ω_3) quindi non potendo essere la $(4 5 6 7)_1$, perchè $\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 \geqq 2\nu + 2$, e neppure la $(1 4 5)_1$ [o le analoghe $(245)_1$ $(146)_1$, etc.], perchè dovrebbe essere:

$$\theta_1 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_8 < 2\nu + 1,$$

ed allora dalle:

$$2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 = 8\nu - 2,$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_6 + \theta_7 \leqq 4\nu + 1$$

si ricaverebbe l'assurdo

$$\theta_2 + \theta_3 > 2\nu - 4 + \theta_8,$$

sarà necessariamente la $(12)_1$: D'altra parte questa è fondamentale se vi è nella involuzione un punto semplice, perciò si conchiude:

od $$r_8 = 1\,,\ h = 8\,;$$

ovvero non vi ha alcun punto semplice, e tutti i punti 8, ... h devono essere sulla $(12)_1$ e di più per uno qualunque di essi, i, possono passare due sole rette unite la $(12)_1$ e la $(3\,i)_1$ la quale non potrebbe contenere altri punti fondamentali [ciò si dimostra come sopra si è provato che $(145\,8)_1$ non può essere una retta unita]; in tal caso sarà $r_1 = 2, r_3 = n-3$, e ciò è impossibile perchè deve essere $r_1 > 2$, $r_1 + r_3 < n$.

Se poi $h = 8$, $r_8 = 1$, $r_1 + r_2 = n$ la retta unita che passa per 8 dovrebbe essere evidentemente la $(38)_1$ la quale conterrebbe allora due dei punti 4, 5, 6, 7, p. es. 4, 5, sarebbe dunque:

$$r_3 + r_4 + r_5 = n - 2, \qquad r_6 + r_7 = n - 2\,,$$

$$r_1 + r_2 + r_6 + r_7 = 2n - 2\,,$$

quindi: $$r_3 = r_4 = r_5 = 2\,,$$

$$n = 8 \text{ ed allora è } \nu \leqq 3.$$

15. Occupiamoci ora del caso nel quale le Φ sono tutte unite, e consideriamo ancora tutte le curve $[\Psi]$ d'ordine $2\nu + 1$ passanti pei punti base delle Φ come le Φ stesse, senza però possedere in essi le tangenti comuni alle Ω. Tali curve formano un sistema lineare a $c + \gamma_1 + 6$ dimensioni, e due qualunque di esse si segano fuori dei loro punti base in $2\nu + 4$ punti.

Se tutte queste curve fossero unite si avrebbe sempre:

$$c + \gamma_1 + 5 \leqq \nu + 2\,,$$

$$p \geqq \nu + \gamma_1 + 2.$$

Se non sono tutte unite le coppie di curve corrispondenti si corrisponderanno anche in un'omografia involutoria, non degenere, nella quale si avranno due sistemi fondamenteli $[\Psi_1]$ e $[\Psi_2]$ di curve unite rispettivamente a

$$c + \gamma_1 + 5 - m, \qquad m$$

dimensioni.

Se $[\Phi]$ appartiene al primo sistema sarà $m \leqq 1$, altrimenti nel sistema $[\Psi_2]$ vi sarebbe una curva Φ, quindi una curva di $[\Psi_1]$, il che non può essere.

Mantenendo le stesse notazioni del n° 12, e col medesimo ragionamento colà seguito, si trova, che tutte le Ψ_1, le quali contengono una C come parte fissa, formano un sistema lineare a $c+\gamma_1+1-m$ (*) dimensioni e due qualunque di esse si segano esternamente ai punti base in

$$\nu - 4 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 - K^2 - u_1\right)$$

coppie di punti corrispondenti, per cui si trova:

$$c \leqq \nu - 3 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 - K^2 - u_1\right) - \gamma_1 + m - 1.$$

Sarà adunque:

$$p \geqq \nu + \gamma_1 + 2$$

ogni qual volta sia

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 - K^2 - u_1 + 2 - 2m\right) \geqq 0. \qquad \beta)$$

16. Se $m = 1$ la C è variabile in un fascio e se de' suoi punti base alcuni non cadono nei punti fondamentali od uniti, essi sono in numero pari, divisi in y coppie di punti corrispondenti. Allora è $K^2 = \sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 + 2y$ e la relazione β) diviene:

$$y + \frac{u_1}{2} \leqq 0$$

Dimostriamo che anche non essendo $y = 0$, $u_1 = 0$ è $p \geqq \nu + 2$ (ovvero, per la convenzione fatta, $\nu \leqq 4$ o la involuzione di Jonquières), così potremo dire che per $m = 1$ è $p \geqq \nu + 2$.

Se u_1 è diverso da zero deve essere pari necessariamente.

(*) Questo numero non può essere negativo, e se fosse zero dovrebbe essere $c = 0$ quindi $p = 2\nu - 1 \geqq \nu + 2$ per $\nu \geqq 3$.

Se indichiamo con X e $2Y$ le intersezioni (distinte dai punti base delle Ψ) di una C qualunque rispettivamente colla curva Γ e col complesso delle rette unite, dovremo avere:

$$\sum_{i=1}^{h} s_i(\theta_i - s_i) + u_2 = K(2\nu + 1 - K) - X - 2Y,$$

dalla quale e dalla

$$\sum_{i=1}^{h+a} s_i\theta_i = \sum_{i=1}^{h} s_i(r_i - \lambda_i) + 2u_1 + u_2$$

si ricava facilmente:

$$K = 6 - y - Y.$$

Nelle nostre ipotesi le C hanno al massimo dei punti tripli nei punti fondamentali (perchè le Ω di questi devono essere segate soltanto in tre coppie di punti corrispondenti dalle C) quindi, se le quattro direzioni fisse delle Ω sono in un medesimo punto 1, sarà $s_1 = 3$, $\varepsilon_1 = 0$; se tali direzioni sono in punti separati 1, 2, deve essere $s_1 \gtreqless s_2 \gtreqless 2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Il caso $K \lesseqgtr 3$ non può aver luogo.

Se $K = 4$ si vede tosto che la relazione β) risulterebbe soddisfatta qualora fosse $u_1 > 0$, ovvero $y > 1$, tenendo conto che le C devono essere unite. Se finalmente è $u_1 = 0$, $y = 1$, $Y = 1$ le C possono essere soltanto curve di questi tipi:

I, $\qquad (1^3 2\ 3456\ AA')_4$

II, $\qquad (1^2 2^2 345678 AA')_4$

III, $\qquad (1^2 2^2 3^2 45\ AA')_4$

A, A' essendo la coppia di punti corrispondenti appartenenti alla del fascio (C).

Nel I caso si avrebbe:

$$3r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 4(n - 1),$$

$$2r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 < 3n,$$

quindi:
$$r_1 > n - 4,$$

$$r_i < 4 \text{ per } i > 1,$$

$$r_2 + r_3 \geqq n - 4,$$

$$n \leqq 10, \quad \nu \leqq 4.$$

Nel II caso avendosi:

$$2r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4 + \ldots + r_8 = 4(n-1),$$

sarà:
$$r_1 + r_2 - \sum_9^h r_i = n - 1,$$

dunque:
$$h = 9, \quad r_9 = 1;$$

ovvero:
$$h = 8;$$

in ambo i casi [considerando la $(1^2 2^2 3^2 4\,5\,6\,7\,8)_4$] si trova:

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_8 \leqq 4n,$$

$$r_3 \leqq 4; \text{ analogamente } r_4 \leqq 4, \text{ etc.}$$

Ora la retta unita segata in due punti dalle C (fuori dei punti base) non può passare, manifestamente, soltanto per 1 o 2. Sia allora la $(34)_1$ e quindi dovrà aversi $r_3 + r_4 \geqq n - 2$ e necessariamente:

$$n \leqq 10, \quad \nu \leqq 4.$$

Nel III caso egualmente dovendo essere:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \sum_1^5 r_i = 4(n-1),$$

si trova:
$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq 2n - 4,$$

$$r_4 + r_5 \leqq 4\,,$$

$$2(r_1 + r_2 + r_3) \leqq 3n\,,$$

$$r_4 + r_5 \geqq n - 4\,;$$

dunque: $$n \leqq 8\,, \qquad \nu \leqq 3.$$

17. Si supponga $K = 5$, però $y + Y = 1$. Anche qui si vede come non possa essere $u_1 > 0$, od $y > 0$ senza che la β) sia soddisfatta, oppure non sia $\nu \leqq 4$.

Infatti se le C hanno un punto triplo in 1 e ρ punti doppi $2, 3, \ldots, \rho + 1$ dovremo avere:

$$2r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{\rho+1} \geqq 2(n - 1)\,,$$

e necessariamente $\rho \geqq 2$, quindi la β) è soddisfatta se $u_1 > 0$. Se $u_1 = 0$ ed $y = 1$ le C saranno:

$$(1^3 2^2 3^2 4\ 5 6 7 8 9 A A')_5\,,$$

ovvero: $$(1^3 2^2 3^2 4^2 5\, 6 A A')_5\,.$$

Nel primo caso avendosi:

$$3\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8 + \theta_9 = 10\nu - 1$$

e $$2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq 4\nu\,,$$

otteniamo:

$$\sum_1^9 \theta_i \geqq 6\nu - 1.$$

Per la qual cosa se i punti fondamentali sono più di 9, ovvero se vi è qualche punto unito, avremo (n^1 2, 5):

$$\sum_1^{k+\epsilon} \theta_i = 4\nu + 2p - 3 > 6\nu - 1\,,$$

$$p \geqq \nu + 2.$$

Se non vi fossero poi nè altri punti fondamentali nè punti uniti isolati si vede subito che deve essere $2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq 4\nu - 2$, perciò la relazione

$$p \geqq \nu + 2,$$

nel caso nostro, è sempre soddisfatta.

Se poi le C sono $(1^3 2^2 3^2 4^2 5\, 6\, A A')_5$, avendosi:

$$3\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 10\nu - 1;$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \leqq 4\nu + 1;$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6 \leqq 4\nu + 1;$$

risulta:

$$\theta_1 \geqq 2\nu - 3;$$

ma per le involuzioni non di Jonquières (*) è $\theta_1 \leqq 2\nu - 2$ quindi:

od è: $\theta_1 = 2\nu - 2, \quad \theta_i \leqq 2 \quad (i > 1),$

ovvero: $\theta_1 = 2\nu - 3, \quad \theta_i \leqq 3 \quad (i > 1).$

In entrambi i casi dovrebbero essere $\nu \leqq 4$.

Se le C non posseggono punti tripli ma solamente ρ punti doppi, o σ punti semplici nei fondamentali, dalla $\sum_{i=1}^{\rho} r_i + \sum_{i=1}^{\rho+\sigma} r_i = 5(n-1)$, si ricava:

$$\sum_{i=1}^{\rho} r_i \geqq 2(n-1).$$

La quale dice che i punti fondamentali doppi per le C sono quattro almeno. Se poi questi fossero solamente quattro, le C dovrebbero passare semplicemente almeno, per due altri punti fondamentali, essendo esse unite, perciò necessariamente se la β) non è soddisfatta deve essere $u_1 = 0$, $\rho \leqq 5$, $y = 1$. In tali ipotesi sono possibili due casi soltanto

$$C = (1^2 2^2 3^2 4^2 5\, 6\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11\; A A')_5;$$

$$C = (1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6\, 7\, 8\; A A')_5;$$

(*) Berzolari l. c., n° 4.

ed allora con ragionamento analogo al precedente si prova che è sempre

$$p \geqq \nu + 2.$$

18. Si supponga finalmente $K = 6$ quindi necessariamente $y = 0$.

Se ρ è il numero dei punti tripli, σ quello dei punti doppi, e τ quello dei punti semplici che le C posseggono nei punti fondamentali, e se $u_1 > 0$, la relazione β) è soddisfatta ogni qual volta si abbia:

$$9\rho + 4\sigma + \tau \geqq 29. \qquad \gamma)$$

Siccome poi abbiamo:

$$2\sum_{i=1}^{\rho} r_i + \sum_{i=\rho+1}^{\rho+\sigma} r_i + \sum_{i=1}^{\rho+\sigma+\tau} r_i = 6(n-1),$$

e per le involuzioni di classe $\nu > 4$ è $h \geqq 8$, così si vede che non può essere $\rho \mp 0$ nè $\rho \geqq 3$ senza che γ) risulti soddisfatta.

Questa potrà non essere verificata solo quando si abbia:

$$\rho = 2, \quad \sigma = 2, \quad \tau \leqq 2;$$

$$\rho = 2, \quad \sigma = 1, \quad \tau \leqq 6;$$

$$\rho = 2, \quad \sigma = 0, \quad \tau = 10;$$

$$\rho = 1, \quad \sigma \leqq 4.$$

Nel primo caso verrebbe:

$$r_1 + r_2 \geqq 2n - 6.$$

Nel secondo:

$$2r_1 + 2r_2 + r_3 \geqq 3(n-1);$$

nel terzo:

$$2r_1 + 2r_2 \geqq 3(n-1),$$

relazioni manifestamente impossibili nelle nostre ipotesi.

Nell'ultimo caso poi si avrebbe:

$$2r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \geqq 3(n-1),$$

donde $r_1 \geqq n-3$, $r_2 + r_3 \geqq n-3$, $r_4 + r_5 \geqq n-3$ dunque:

$$2n \geqq r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \geqq 3n - 9,$$

$$n \leqq 9, \qquad r \leqq 4.$$

19. Per esaurire il tema che ci siamo proposti ci resta solo da considerare l'ipotesi $m = 0$ (n° 15) precisamente basterà provare, perchè si possa dire che $p \geqq \nu + \Delta$ per $\Delta = 2$, che essendo $m = 0$, od è soddisfatta la relazione:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 - K^2 - u_1 + 2\right) \geqq 0; \qquad (\beta'$$

ovvero è $\nu \leqq 4$, o l'involuzione è di Jonquières.

Dalle relazioni già ricordate (n° 16):

$$\sum_{i=1}^{h} s_i(\theta_i - s_i) + u_2 = K(2\nu + 1 - K) - X - 2Y,$$

$$\sum_{i=1}^{h+n} s_i\theta_i = \sum_{i=1}^{h} s_i(r_i - \lambda_i) + 2u_1 + u_2,$$

si ricavano le due altre:

$$\sum_{i=1}^{h+n} s_i^2 - K^2 - u_1 + 2 = X + 2Y + u_1 + u_2 - 4,$$

$$2K = 6 + 2u_1 + u_2 + X.$$

Quindi se la relazione β') non è soddisfatta dovrà essere:

$$\frac{1}{2}(X + 2Y + u_1 + u_2 - 4) < 0,$$

ossia:

$$X + 2Y + u_1 + u_2 < 3;$$

per la qual cosa sarà:

$$2K < 9 + u_1 - 2Y,$$

$$K \leqq 5.$$

Ma anche quando sia $K \leqq 5$ la relazione β') è soddisfatta, se l'involuzione è di classe $\nu < 4$ e non di Jonquières.

Infatti, dovendo la C avere od un punto triplo, o due punti doppi, per $K = 3$ la β') è manifestamente verificata.

Se $K = 4$, e la C ha un punto triplo in 1, dovrà essere:

$$3r_1 + \sum_{i=2}^{h} s_i r_i = 4(n-1),$$

quindi (non considerando le involuzioni di Jonquières):

$$\sum_{i=2}^{h} r_i s_i \geqq n + 2;$$

però non tutte le s_i sono nulle per $i > 1$ e se è $\sum_{i=2}^{h} s_i^2 \geqq 4$, la β') risulta soddisfatta, quindi basterà vedere se possano esservi tre sole (o meno di tre) s_i eguali ad 1: Ma se ciò fosse sarebbe:

$$3r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \geqq 4(n-1),$$

$$3n \geqq 4(n-1),$$

$$n \leqq 4, \qquad \nu < 3.$$

Se poi la C non ha un punto triplo deve avere due punti doppi (almeno) in 1 e 2 quindi ancora la nostra relazione risulta verificata quando sia:

$$\sum_{3}^{h} s_i^2 \geqq 5.$$

Ma si ha:

$$2r_1 + 2r_2 + \sum_{3}^{h} s_i r_i = 4(n-1),$$

$$r_1 + r_2 = n - \alpha,$$

quindi:

$$\sum_{3}^{h} s_i r_i = 2n - 4 + 2\alpha\,;$$

e ciò dimostra che se $s_3 = 2$ è $s_4 \geqq 1$ e se $s_3 = 1$ anche $s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 1$; quindi è sempre $\sum_{3}^{h} s_i^2 \geqq 5$.

Supponendo infine $K = 5$, si deve avere $u_1 \geqq 2$, quindi la relazione β') è conseguenza di questa:

$$\sum_{i=1}^{h} s_i^2 \geqq 16.$$

Se la C non ha punti tripli nei fondamentali, essa deve avere ρ punti doppi in $1, 2, \ldots \rho$ e sarà:

$$2(r_1 + r_2 + \ldots + r_\rho) + \sum_{\rho}^{h} r_i \geqq 5(n-1)\,,$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\rho \geqq 2n - 2\,,$$

e siccome per $n > 8$ l'involuzione non può avere soli 4 (o meno) punti fondamentali non semplici così $\rho \geqq 4$ e $\sum_{i=1}^{h} s_i^2 \geqq 16$; ed ha luogo pure questa relazione se la C ha più di un punto triplo o se avendone uno solo ha anche più di un punto doppio, ovvero un solo punto doppio e più di due punti semplici nei fondamentali; e questo necessariamente deve avvenire perchè la C è unita.

20. Concludiamo:

Il genere delle curve Ω *d'ordine* $2\nu + 1$ *con* Δ *coppie di tangenti comuni, non può superare* $2\nu - 1$ *(n° 4) e non può essere inferiore a* $\nu - \Delta$ *(n° 8).*

Quando però vi sia nella involuzione un punto i, pel quale si abbia $\varepsilon_i = 0$, *il genere delle* Ω *non deve essere inferiore a* ν, *e finalmente per* $\Delta = 1$ *e* $\Delta = 2$ *questo genere deve essere almeno* $\nu + \Delta$.

Tali limiti per il numero p dànno analoghe limitazioni per la somma

delle moltiplicità delle Ω nei punti base della loro rete (n° 2, 5), le quali possono tornare di qualche vantaggio nella ricerca delle involuzioni di una data classe (*) e condurre anche direttamente a parecchie conseguenze.

Messina, febbrajo 1890.

V. MARTINETTI.

(*) P. es. le conclusioni alle quali siamo arrivati potrebbero semplificare notevolmente i ragionamenti dei n[i] 5, 11, etc. della mia Memoria « *Sopra alcune trasformazioni*, etc., l. c. (tenendo conto della condizione posta al n° 12) e quelli dei n[i] 6, 10, etc. della Memoria citata di Berzolari, Parte II.

SULLA TRASFORMAZIONE DI HEINE;

Nota di S. **Pincherle**, in Bologna.

Adunanza del 23 marzo 1890.

È nota la trasformazione di una funzione data $\varphi(t)$ in un'altra $f(x)$ mediante la posizione

$$f(x)=\int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}, \tag{1}$$

trasformazione di cui l'Heine si è giovato ripetutamente (Crelle, t. LX, LXI e LXII) nelle sue ricerche sulle funzioni di Lamé generalizzate e nelle conseguenti applicazioni ai moduli di periodicità degl'integrali iperellittici. La proprietà più essenziale della trasformazione di Heine sta in ciò, che se $\varphi(t)$ è integrale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti razionali

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2}$$

la $f(x)$ soddisfa all'equazione lineare non omogenea

$$\Delta\varphi = R(x), \tag{3}$$

dove $R(x)$ è funzione razionale, e questa proprietà discende dalle due formole

$$x^m f(x)=\int_a^b \frac{\varphi(t)t^m\,dt}{x-t}+r(x),\quad f^{(n)}(x)=\int_a^b \frac{\varphi^{(n)}(t)\,dt}{x-t}+r_1(x) \tag{4}$$

che si deducono facilmente dalla (1), e dove $r(x)$, $r_1(x)$ rappresentano ancora funzioni razionali. Conviene aggiungere che, scelti convenientemente i limiti a e b, la $R(x)$ si può ridurre a zero, e così da un integrale particolare della (2) la trasformazione di Heine permette di ricavarne un secondo.

Però, l'applicazione del metodo di Heine è subordinata alla condizione che il secondo membro della (1) abbia un significato, cioè $\varphi(t)$ non deve diventare infinita d'ordine (algebricamente) uguale o superiore al primo, nè ai limiti, nè lungo la linea d'integrazione. La presente Nota ha per oggetto di togliere questa eccezione, il che si può fare con una osservazione oltremodo semplice tutte le volte che $\varphi(t)$ abbia un infinito d'ordine finito. Basterà supporre la $\varphi(t)$ infinita nel limite inferiore a d'integrazione, poichè se lo fosse lungo le linee d'integrazione, basterebbe mutarla tenendone fissi gli estremi, e se lo fosse nei due limiti, basterebbe spezzare l'integrale.

Sia ora h un numero intero tale che $\varphi(t)$ e le sue derivate che figurano nella (2) siano infinite di ordine (algebricamente) minore di $h+1$; inoltre la linea d'integrazione da a a b sia semplice e di lunghezza finita.

La formola che si può sostituire alla (1) è

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^h}\int_a^b \frac{\varphi(t)(t-a)^h\,dt}{x-t}. \tag{5}$$

Infatti, dapprima il secondo membro della (5) ha un significato; inoltre, posto

$$\varphi(t)(t-a)^h = \Phi(t), \tag{6}$$

la $f(x)(x-a)^h$ viene ad essere la trasformata di Heine della $\Phi(t)$, e siccome questa soddisfa all'equazione

$$\Delta_1 \Phi = 0,$$

trasformata di (2) mediante la posizione (6), così ne viene che $f(x)$ soddisfa all'equazione :

$$\Delta_1 [f(x)(x - a)^b] = R_1(x), \tag{7}$$

essendo sempre R simbolo di funzione razionale. Ma l'operazione Δ_1 eseguita su $f(x)(x - a)^b$ equivale alla Δ eseguita su $f(x)$, onde la (7) si muta in

$$\Delta f(x) = R_2(x),$$

ioè gode della stessa proprietà della trasformata mediante la (1) nel aso in cui il secondo membro della (1) aveva un significato.

Bologna, 11 marzo 1890.

S. PINCHERLE.

SUR LES POLYNÔMES DE LEGENDRE;

par M. Ch. Hermite, à Paris.

Adunanza del 23 marzo 1890.

Les propriétés fondamentales exprimées par les relations:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

peuvent facilement s'établir au moyen de l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

dont le développement en série suivant les puissances de α a pour terme général: $\alpha^n \int_{-1}^{+1} x^p X_n dx$. En posant $\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2} = 1 - \alpha y$, on a en effet la transformée,

$$J = \int_{-1}^{+1} \left[y + \frac{\alpha}{2}(1 - y^2)\right]^p dy,$$

qui est un polynôme en α du degré p, ce qui donne immédiatement, pour $n > p$, l'équation:

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = 0.$$

Employons ensuite le développement par la formule du binôme :

$$[y+\frac{\alpha}{2}(1-y^2)]^p=\sum\frac{\alpha^n}{2^n}p_n y^{p-n}(1-y^2)^n$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p)$$

on aura, pour toutes les valeurs de n non supérieures à p, l'égalité :

$$\int_{-1}^{+1}x^p X_n\,dx=\frac{p_n}{2^n}\int_{-1}^{+1}y^{p-n}(1-y^2)^n\,dy,$$

où j'écris pour abréger,

$$p_n=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.\ 2\ldots n}.$$

L'intégrale du second membre est nulle lorsque $p-n$ est impair, dans le cas contraire elle s'exprime par la quantité,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+n+1}{2}+1\right)},$$

et en supposant en particulier $p=n$, nous aurons :

$$\int_{-1}^{+1}x^n X_n\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)}.$$

On va voir que ce résultat conduit facilement à l'égalité

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Soit, en effet,

$$X_n=Ax^n+Bx^{n-2}+\ldots,$$

la relation suivante :

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = A\int_{-1}^{+1} x^n X_n\,dx,$$

montre qu'il suffit d'avoir la constante A. Elle s'obtient en remarquant qu'elle représente la limite de $\frac{X_n}{x^n}$ pour n infini, et cette limite se tire de l'équation fondamentale

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum \alpha^n X_n,$$

en y remplaçant α par $\frac{\alpha}{x}$. Ayant en effet :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha+\frac{\alpha^2}{x^2}}} = \sum \alpha^n \frac{X_n}{x^n},$$

la supposition de x infini montre que A est le coefficient de α^n, dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}$, d'où la valeur cherchée :

$$A = \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2\ldots n}.$$

On peut, au moyen de la relation :

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

l'écrire de cette manière :

$$A = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

de sorte qu'on trouve, après réduction :

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{2}{2n+1}.$$

Voici maintenant une remarque au sujet de la discontinuité remarquable qu'offre la formule de Laplace :

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

où il faut prendre ε égal à $+1$ ou à -1, suivant que la partie réelle de la variable x est positive ou négative. Ce résultat important découle de la relation élémentaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\varepsilon i\pi}{\sqrt{B^2-AC}},$$

dans laquelle ε est l'unité en valeur absolue et a le signe du coefficient de i dans la quantité $\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$ (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 290). Supposons $B=0$, ce qui donne l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+C} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{At^2+C},$$

et posons $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$; nous aurons cette égalité :

$$2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{A+C-(A-C)\cos\varphi} = \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{AC}},$$

ε étant $+1$ ou -1, suivant que le coefficient de i dans $\frac{i\sqrt{AC}}{A}$,

et par conséquent suivant que le terme réel dans $\frac{\sqrt{AC}}{A}$ est positif ou négatif. J'employerai cette formule en faisant :

$$A = x - \alpha - \sqrt{x^2 - 1}, \qquad C = x - \alpha + \sqrt{x^2 - 1},$$

d'où :

$$AC = 1 - 2\alpha x + \alpha^2;$$

je supposerai que x ait une valeur imaginaire quelconque, mais j'admettrai que α soit infiniment petit. Le signe du terme réel de $\frac{\sqrt{AC}}{A}$ sera donc celui de la partie réelle de l'expression $\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$, ou bien $x + \sqrt{x^2 - 1}$, qu'on obtient en posant avec Heine:

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = X + iY.$$

Nous trouvons en effet :

$$2x = \frac{X(1 + X^2 + Y^2)}{X^2 + Y^2} + i\frac{Y(1 - X^2 - Y^2)}{X^2 + Y^2},$$

par où l'on voit que X a le signe de la partie réelle de la variable x, et qu'on doit prendre

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{x - \alpha - \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi} = \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

ε étant égal à $+1$ ou -1, suivant que cette partie réelle est positive ou négative. Cette égalité conduit à la formule de Laplace, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de α, et égalant les coefficients des termes en α^n.

Faisons en second lieu

$$A = 1 - \alpha(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad C = 1 - \alpha(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

ce qui donnera encore,

$$AC = 1 - 2\alpha x + \alpha^2,$$

on remarquera que pour α infiniment petit, le signe de la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1})}$$

ne dépend plus de x, de sorte que l'on a toujours quelque soit la valeur de cette variable :

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

en prenant le second membre avec le signe $+$. L'expression de Jacobi :

$$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n,$$

qui est la conséquence de cette formule, n'offre donc aucune discontinuité.

On peut encore se rendre compte fort simplement de la particularité qu'offre l'intégrale de Laplace, en l'écrivant sous cette forme :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

et remarquant qu'elle représente alors l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{dz}{z\left(x+\frac{z^2+1}{2z}\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}}$$

prise le long d'une circonférence de rayon égal à l'unité, $z=e^{i\varphi}$. Cette intégrale a ainsi pour valeur le résidu de la fonction rationelle :

$$\frac{1}{z\left(x+\frac{z^2+1}{2z}\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}, \text{ ou bien, } \frac{2^{n+1}z^n}{[2zx+(z^2+1)\sqrt{x^2-1}]^{n+1}},$$

correspondant à celle des deux racines du dénominateur, à savoir :

$$z'=-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad z''=-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

dont le module est moindre que l'unité. Mais les résidus relatifs à ces racines ont une somme nulle; ayant donc obtenu une détermination de l'intégrale dans l'hypothèse

$$\operatorname{mod} z' < 1,$$

on doit dans l'hypothèse contraire, lorsqu'on a par conséquent

$$\operatorname{mod} z'' < 1,$$

prendre le résidu relatif à z'', qui est le précédent changé de signe.

Maintenant il est aisé de voir en remplaçant la variable x par $x+iy$, que le module de z' sera plus petit ou plus grand que l'unité, suivant que la partie réelle x sera positive ou négative. C'est ce qui résulte en effet de la relation :

$$\operatorname{mod}^2 \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2+y^2}.$$

En dernier lieu je remarquerai que le résidu correspondant à z' de la quantité

$$\frac{2^{n+1} z^n}{\left[2zx + (z^2+1)\sqrt{x^2-1}\right]^{n+1}},$$

calculé d'après la règle ordinaire, donne l'expression de X_n, développée suivant les puissances de $x-1$, à savoir:

$$X_n = (2n)_n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + n_1(2n-1)_{n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$$
$$+ n_2(2n-2)_{n-2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-2} + \dots$$

en écrivant pour abréger:

$$(m)_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}.$$

Paris, 17 mars 1890.

CH. HERMITE.

IL COMBINANTE N DELLA FORMA TERNARIA CUBICA;

Memoria di G. **Maisano**, in Messina.

Adunanza del 13 aprile 1890.

Lo studio del combinante N della forma ternaria cubica e di alcune proprietà della curva del 4° ordine

$$N \equiv (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2 = 0 \qquad (u \text{ costante})$$

forma lo scopo principale del presente lavoro, il quale si fonda essenzialmente sui risultati ottenuti nelle tre classiche Memorie:

A) *Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen*, von A. Clebsch und P. Gordan (Math. Annalen, Bd. I, S. 56);

B) *Ueber ternäre Formen dritten Grades*, von P. Gordan (Math. Annalen, Bd. I, S. 90);

C) *Ueber cubische ternäre Formen*, von Clebsch und Gordan (Math. Annalen, Bd. VI, S. 436).

Supponendo che il lettore le abbia sott'occhio, ci limiteremo a richiamarne le formule, segnandole cogli stessi numeri; mentre distingueremo con numeri romani le altre che di mano in mano ci verrà fatto di ottenere.

Nella terza delle tre citate Memorie, ove trovansi riuniti i risultati più importanti della teoria delle forme ternarie cubiche, sono investigate tutte le forme del 2° grado nei coefficienti del combinante N. Questa ricerca verrà da noi estesa ad alcune forme di 3°, 4° e 6°

grado, che occorrono nello studio di detta curva, al quale intento è necessaria l'introduzione di una forma, di cui non si fa alcun impiego nella Memoria C, cioè della forma di 3^a ordine e di 3^a classe

$$Q = (a b u)^2 (a c u) b_x c_x^2 = (\Theta f u),$$

che incontreremo in parecchie relazioni e della quale ci serviremo per associare quattro forme del sistema completo della forma fondamentale f.

Parte prima — Il combinante N.

§ 1. — La forma Q.

Applicando l'operazione δ alla forma Q (vedi Memoria C, § 4) e tenendo conto del teorema

$$(a x u)^3 \equiv 0, \qquad (C, \text{ pag. } 45 \ldots 53)$$

si ottiene:

$$\delta Q = 2 (a x u)^2 (a b u) x_x b_x^2 + (a b u)^2 (a x u) b_x x_x^2$$

$$= 3 (a x u)^2 (a b u) x_x b_x^2 + 2 (a b u) (a x u) x_x b_x [(a b u) x_x - (a x u) b_x],$$

ovvero, in virtù d'una nota identità,

$$\delta Q = 3 (a x u)^2 (a b u) x_x b_x^2 + 2 (a b u) (a x u) [(a b \alpha) u_x - (b \alpha u) a_x] x_x b_x \ldots b_x.$$

Dei tre termini che stanno al 2° membro il terzo è nullo, il secondo è uguale a

$$- (a x u) (a \alpha b) b_x u_x [(a b x) u_x + (a \alpha u) b_x + (\alpha b u) a_x] = 0,$$

infatti i due primi si annullano pel teorema citato e l'ultimo cambia di segno, scambiando i simboli a e b; dunque

$$\delta Q = 3 (a x u)^2 (x c u) a_x c_x^2 = 3 (a x u)^2 (a b u) \alpha_x b_x^2$$

$$= 3 (a b u)^2 (a x u) b_x x_x^2 = 3 Q_1, \qquad \text{(I)}$$

giusta le formule [C, (31)].

Applicando l'operazione δ alla forma Q_1 si ha

$$=(\beta b u)^2(\beta\alpha u)b_x\alpha_x^2+(a\beta u)^2(a\alpha u)\beta_x\alpha_x^2+\frac{1}{2}S.(a b u)^2(a c u)b_x c_x^2,$$

ero, pel teorema

$$(a\beta u)^3\equiv 0,$$

$$\delta Q_1=2(a\beta u)^2(a\alpha u)\beta_x\alpha_x^2+\frac{1}{2}S.Q=2(a\beta u)^2(\beta\alpha u)a_x\alpha_x^2+\frac{1}{2}S.Q,$$

$$Q_2=(a\alpha u)^2(\alpha\beta u)a_x\beta_x^2=(a\alpha u)^2(a\beta u)\alpha_x\beta_x^2. \tag{II}$$

Si ha infine:

$$\delta Q_2=(\gamma\alpha u)^2(\alpha\beta u)\gamma_x\beta_x^2+\frac{1}{2}S.(a b u)^2(b\beta u)a_x\beta_x^2$$

$$+\frac{1}{2}S.(a\alpha u)^2(\alpha b u)a_x b_x^2=(\alpha\beta u)^2(\alpha\gamma u)\beta_x\gamma_x^2+S.Q_1,$$

$$Q_3=(\alpha\beta u)^2(\alpha\gamma u)\beta_x\gamma_x^2. \tag{III}$$

La forma Q relativa alla forma composta $\varkappa f+\lambda\Delta$ è dunque:

$$Q_{\varkappa\lambda}=\varkappa^3.Q+3\varkappa^2\lambda.(a b u)^2(a\alpha u)b_x\alpha_x^2+3\varkappa\lambda^2.(a\alpha u)^2(\alpha\beta u)a_x\beta_x^2$$

$$+\lambda^3.(\alpha\beta u)^2(\alpha\gamma u)\beta_x\gamma_x^2. \tag{IV}$$

Le forme Q_1, Q_2 e Q_3 possono sostituire le forme

$$a_s u_s^2 a_x b_x^2(a b u),\quad a_t u_t^2 a_x b_x^2(a b u)\ \text{ e }\ u_t u_s^2 a_t a_x^2(s t x)$$

l sistema completo della forma fondamentale f. [B, pag. 102].
Si ha infatti:

$$a_s u_s^2 a_x^2=(a\alpha u)^2 a_x\alpha_x+\frac{S}{6}.u_x^2; \tag{46$_1$}$$

però:

$$a_s u_s^2 a_x b_x^2(a b u)=(a\alpha u)^2(a b u)\alpha_x b_x^2=Q_1. \tag{V}$$

$$a_t u_t^2 a_x^2=\frac{1}{2}(\alpha\beta u)^2\alpha_x\beta_x+\frac{S\Theta}{12}+\frac{T}{6}u_x^2, \tag{46$_2$}$$

donde

$$a_t u_t^2 a_x b_x^2 (a b u) = \frac{1}{2} (\alpha \beta u)^2 (\alpha a u) \beta_x a_x^2 + \frac{S}{12} . Q.$$

Il primo termine del 2° membro è uguale a

$$\frac{1}{2} (\alpha \beta u)(a \alpha u) a_x \beta_x [(a \alpha u) \beta_x - (a \beta u) \alpha_x - (a \alpha \beta) u_x]$$

$$= \frac{1}{2} (a \alpha u)^2 (\alpha \beta u) a_x \beta_x^2 = \frac{1}{2} Q_2 ,$$

essendo

$$(a\alpha\beta)(\alpha\beta u)(a\alpha u) a_x \beta_x = (a\alpha\beta)(a\alpha u)\beta_x [(a\alpha\beta) u_x - (a\alpha u)\beta_x + (a\beta u)\alpha_x] = 0 ;$$

dunque:

$$a_t u_t^2 a_x b_x^2 (a b u) = \frac{1}{2} Q_2 + \frac{1}{12} S . Q. \tag{VI}$$

La $u_t u_s^2 a_t a_x^2 (s t x)$ può mettersi in relazione colla forma Q_3 nel seguente modo.

Dalla formula:

$$\alpha_s u_s^2 \alpha_x^2 = - \frac{1}{2} (\alpha \beta u)^2 \alpha_x \beta_x + \frac{S . \Theta}{4} + \frac{T}{6} u_x^2 \tag{46$_b$}$$

si ottiene

$$\alpha_s u_s^2 \alpha_x (\alpha \beta u) \beta_x^2 = - \frac{1}{2} (\alpha \beta u)^2 (\alpha \gamma u) \beta_x \gamma_x^2 + \frac{1}{4} S . (a b u)^2 (a \alpha u) b_x \alpha_x^2 .$$

Il primo membro è uguale a

$$\frac{1}{2} (\alpha \beta u) u_s^2 \alpha_x \beta_x [\alpha_s \beta_x - \alpha_x \beta_s] = \frac{1}{2} (\alpha \beta u) \alpha_x \beta_x u_s^2 [\alpha \beta (s x)] = \frac{1}{2} (\kappa s x) \mathrm{K}_x^2 u_\kappa u_s^2$$

e per la formula $(46)_c$:

$$a_t u_t a_x^2 (t s x) u_s^2 = \frac{1}{2} (\kappa s x) \mathrm{K}_x^2 u_\kappa u_s^2 + \frac{1}{12} S . (\vartheta s x) \Theta_x^2 u_\vartheta u_s^2 ;$$

epperò

$$a_t u_t u_s^2 a_x^2 (s t x) = \frac{1}{2} (\alpha \beta u)^2 (\alpha \gamma u) \beta_x \gamma_x^2 - \frac{1}{4} S . (a b u)^2 (a \alpha u) b_x \alpha_x^2$$

$$+ \frac{1}{12} S . (\vartheta s x) \Theta_x^2 u^\vartheta u_s . \tag{VII}$$

2. — La forma $F = (abu)^2(cdu)^2(adu)(bcu) = u_p^6$.

La prima polare di questa forma è uguale a

$$= \frac{1}{3}(abu)^2(cdu)^2(adu)(bcv) + \frac{2}{3}(abu)^2(cdu)(cdv)(adu)(bcu) =$$

$$bu)^2(cdu)^2(adu)(bcv) + \frac{2}{3}(abu)^2(cdu)(adu)[(bcu)(cdv) - (cdu)(bcv)] =$$

$$= (abu)^2(cdu)^2(adu)(bcv) + \frac{2}{3}(abu)^2(cdu)(adu)(bcd)(cuv).$$

Il 2° termine del 2° membro è uguale a

$$\frac{1}{2}(abu)(adu)(bcd).(cuv)[(abu)(cdu) - (adu)(cbu)]$$

$$= \frac{1}{2}(abu)(adu)(bcd)(cuv)(bdu)(acu)$$

$$= \frac{1}{6}(abu)(adu)(bdu).(cuv)[(bcd)(acu) - (acd)(bcu) - (bca)(dcu)]$$

$$= \frac{1}{6}(abu)(adu)(bdu)(abd).(cuv)(ccu) = 0;$$

erò

$$u_p^5 v_p = u_\vartheta^2 v_{\vartheta'}^2 (\Theta\Theta' u)(\Theta\Theta' v) = u_\vartheta^2 u_{\vartheta'} v_{\vartheta'} (\Theta\Theta' u)^2. \qquad \text{(VIII)}$$

Formando la 2^a polare si ha:

$$_p^4 = (abu)^2(cdv)^2(adu)(bcu) + \frac{4}{5}(abu)^2(cdv)(adu)[(cdu)(bcv)$$

$$-(cdv)(bcu)] - \frac{2}{5}(abu)(cdu)(cdv)(adu)[(abu)(bcv) - (abv)(bcu)]$$

$$= u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 (\Theta\Theta' u)^2 + \frac{4}{5}A - \frac{2}{5}B.$$

$$A = -(abu)^2(cdv)(adu)(bcd)(cuv)$$

$$= -\frac{1}{2}(abu)(adu)(bcd).(cuv)[(abu)(cdv) - (adu)(cbv)]$$

$$= -\frac{1}{2}(abu)(adu)(bcd)(cuv)[(bdu)acv) + (abd)(cuv)].$$

Il 1° termine del 2° membro è nullo, infatti esso è uguale a

$$-\frac{1}{6}(abu)(adu)(bdu).(cuv)[(bcd)(acv)-(acd)(bcv)-(bca)(dcv)]$$

$$=-\frac{1}{6}(abu)(adu)(bdu)(abd).(cuv)(ccv)=0;$$

il 2° è uguale a

$$\frac{1}{2}(abd)(abu)(adu)(bdc)(cuv)^2=\frac{1}{2}u_s^2c_s(cuv)^2;$$

dunque

$$A=\frac{1}{2}u_s^2a_s(auv)^2.$$

Si ha inoltre:

$$B=(abu)(cdu)(cdv)(adu)(buv)(abc)$$

$$=\frac{1}{2}(abc)(adu)(cdu)(buv)[(abu)(cdv)-(cbu)(adv)]$$

$$=\frac{1}{2}(abc)(adu)(cdu)(buv)[(acu)(bdv)-(abc)(duv)].$$

Il primo termine del 2° membro è uguale a

$$\frac{1}{6}(acu)(adu)(cdu).(buv)[(abc)(bdv)-(abd)(bcv)-(dbc)(bav)]$$

$$=\frac{1}{6}(acu)(adu)(cdu).(buv)(acv)(bbd)=0;$$

il secondo termine è uguale a

$$-\frac{1}{2}(abc)^2(adu)(cdu)(buv)(duv)=-\frac{1}{2}(\alpha du)^2(\alpha uv)(duv)$$

$$=-\frac{1}{2}(\Pi uv)^2u_\eta^2=-\frac{1}{2}u_s^2a_s(auv)^2,$$

giusta la formula (46)$_a$; epperò

$$B=-\frac{1}{2}a_su_s^2(auv)^2.$$

Si ha dunque:

$$u_p^4v_p^2=u_3^2v_{3'}^2(\Theta\Theta'u)^2+\frac{3}{5}a_su_s^2(auv)^2. \qquad \text{(IX)}$$

Dalla formula (VIII), ponendo $v = a$ e moltiplicando per a_x^2, si ottiene:

$$a_p u_p^5 a_x^2 = (abu)^2 (cdu)(cde)(bcu)(adu)e_x^2$$

$$=(abu)(cdu)(cde)(bcu)(adu)e_x[(abe)u_x+(aeu)b_x-(beu)a_x]=2C+D.u_x.$$

$$C = \frac{1}{2}(cde)(adu)(aeu).(abu)(bcu)b_x[(cdu)e_x-(ceu)d_x]$$

$$=\frac{1}{2}(cde)(adu)(aeu).(abu)(bcu)b_x[(cde)u_x-(deu)c_x].$$

Il primo termine del 2° membro è uguale a

$$\frac{1}{2}(cde)^2(adu)(aeu)(abu)(bcu)b_x.u_x = \frac{1}{2}(a\alpha u)^2(b\alpha u)(abu)b_x.u_x$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{H}bu)^2 b_x.u_x = -\frac{1}{2}a_s u_s^2 (abu)^2 b_x.u_x;$$

il secondo termine è uguale a

$$-\frac{1}{6}(adu)(aeu)(deu).(bcu)b_x c_x[(cde)(abu)-(cae)(dbu)-(cda)(ebu)]$$

$$=\frac{1}{6}(adu)(aeu)(deu)(ade).(bcu)^2 b_x c_x = \frac{1}{6}\Sigma.\Theta;$$

epperò:

$$C = -\frac{1}{2}a_s u_s^2 b_x (abu)^2 u_x + \frac{1}{6}\Sigma.\Theta.$$

$$D = (abu)(cde)(bcu)(cdu)e_x[(cde)(abu)+(abd)(ceu)-(abc)(deu)].$$

Di questi tre termini il 1° è uguale a

$$(cde)^2(abu)^2(bcu)(adu)e_x = (abu)^2(b\alpha u)(a\alpha u)\alpha_x = (\Theta\alpha u)^2 u_\Sigma^2 \alpha_x;$$

gli altri due sono uguali fra loro, epperò la loro somma è uguale a

$$(abd)(abu)(adu).(ceu)e_x[(cde)(bcu)-(cbe)(dcu)]$$

$$=(abd)(abu)(adu)(bdc).(ceu)^2 e_x = u_s^2 c_s (ceu)^2 e_x;$$

si ha dunque:

$$D = (\Theta\alpha u)^2 u_\zeta^2 \alpha_x + u_s^2 a_s (abu)^2 b_x\,,$$

$$a_p u_p^5 a_x = \frac{1}{3}\Sigma.\Theta + (\Theta\alpha u)^2 u_\zeta^2 \alpha_x . u_x\,.$$

La forma $(\Theta\alpha u)^2 u_\zeta^2 \alpha_x$ si può esprimere in funzione delle forme del sistema completo nel seguente modo. Si ha:

$$(\Theta a u)^2 u_\zeta^2 a_x = (bcu)^2 (bau)(cau) a_x$$

$$= \frac{1}{3}(abu)(acu)(bcu)[(bcu)a_x - (acu)b_x - (bau)c_x]\,,$$

$$(\Theta a u)^2 u_\zeta^2 a_x = \frac{1}{3}(abc)(abu)(acu)(bcu).u_x = \frac{1}{3}\Sigma.u_x\,, \qquad \text{(X)}$$

e applicando l'operazione δ ai due membri:

$$2(\mathrm{H}au)^2 u_\eta^2 a_x + (\Theta\alpha u)^2 u_\zeta^2 \alpha_x = \mathrm{T}.u_x\,;$$

ma

$$(\mathrm{H}au)^2 u_\eta^2 a_x = a_s u_s^2 (abu)^2 b_x\,;$$

dunque

$$(\Theta\alpha u)^2 u_\zeta^2 \alpha_x = \mathrm{T}.u_x - 2a_s u_s^2 b_x (abu)^2\,, \qquad \text{(XI)}$$

$$a_p u_p^5 a_x^2 = \frac{1}{3}\;\Sigma.\Theta + \mathrm{T}.u_x^2 - 2a_s u_s^2 (abu)^2 b_x . u_x .$$

Si ha per la formula (46),

$$a_s u_s^2 b_x (abu)^2 = (a\alpha u)^2 (abu)(\alpha bu) b_x\,,$$

e poichè

$$\Lambda = \frac{3}{2}(a\alpha u)^2 (abu)(b\alpha u) b_x + \frac{1}{2}\mathrm{T}.u_x\,, \qquad (78)_4$$

si ottiene, sostituendo:

$$a_p u_p^5 a_x^2 = \frac{1}{3}\Sigma.\Theta + \frac{4}{3}\Lambda.u_x + \frac{1}{3}\mathrm{T}.u_x^2. \qquad \text{(XII)}$$

Dalla quale, applicando l'operazione δ e ricordando che

$$\delta F = \frac{4}{3}\Sigma^2\,, \delta\Lambda = \mathrm{M} = -\frac{3}{4}(a\alpha u)(a\beta u)(\alpha\beta u)^2 a_x + \frac{1}{24}S.\Sigma.u_x\,, \quad (78)_5$$

si ottiene:

$$\alpha_p u_p^5 \alpha_x^2 + \frac{4}{3} a_s u_s^2 a_x^2 . \Sigma = \mathrm{T}.\Theta + \frac{2}{3}\Sigma.\Pi + \frac{4}{3}\mathrm{M}.u_x + \frac{5}{18} S.\Sigma.u_x^2,$$

ovvero, per la (46), :

$$\alpha_p^2 u_p^5 \alpha_x^2 = \mathrm{T}.\Theta - \frac{2}{3}\Sigma.\Pi + \frac{4}{3}\mathrm{M}.u_x + \frac{1}{18} S.\Sigma.u_x^2. \qquad \text{(XIII)}$$

Dalla (IX), ponendo $v = a$ e moltiplicando per a_x, si ha

$$a_p^2 u_p^4 a_x = (abu)^2 (cde)^2 (adu)(bcu) e_x + \frac{3}{5} a_s u_s^2 (abu)^2 b_x$$

$$= (abu)^2 (a\alpha u)(b\alpha u)\alpha_x + \frac{3}{5} a_s u_s^2 (abu)^2 b_x$$

$$= (\Theta \alpha u)^2 u_3^2 \alpha_x + \frac{3}{5} a_s u_s^2 b_x (abu)^2$$

e per le (XI) e (78).

$$a_p^2 u_p^4 a_x^2 = \frac{14}{15}\Lambda + \frac{8}{15}\mathrm{T}.u_x. \qquad \text{(XIV)}$$

Dalla stessa formula (IX) si deducono ancora le seguenti :

$$a_p^3 u_p^3 = \frac{4}{5}\mathrm{T},$$

$$(psx)^3 u_p^3 = -\frac{11}{20} S.Q + \frac{9}{10} Q_2. \qquad \text{(XV)}$$

§ 3. — La forma $I_N = (NN'v)^4 u_n u_{n'}$.

Fra le forme dei primi 6 gradi (*) della forma biquadratica N vogliamo calcolare le otto seguenti

$$I_N = (NN'v)^4 u_n u_{n'},\quad \Theta_N = (NN'v)^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'},$$

$$A_N = (NN'N'')^4 u_n u_{n'} u_{n''},\quad \Delta_N = (NN'N'')^2 N_x^2 N_x'^2 N_x''^2 u_n u_{n'} u_{n''},$$

$$J_N = (NN'u)^2 (NN''u)^2 (N'N''u)^2 u_n u_{n'} u_{n''},$$

(*) Vedi la mia Memoria *Sistemi completi dei primi cinque gradi etc.* nel Giornale del Prof. Battaglini, vol. XIX.

$$S_{N_4} = (NN'N'')(NN'N''')(NN''N''')(N'N''N''')N_x N'_x N''_x N'''_x u_\pi u_{\pi'} u_{\pi''} u_{\pi'''}$$

$$p_N = (NN''N''')^2 (N'N''N''')^2 (NN'u)^2 u_\pi u_{\pi'} u_{\pi''} u_{\pi'''},$$

$$B_N = (NN'N'')(NN'N''')(NN''N''')(N'N''N''')(NN^{IV}N^{V})$$

$$(N'N^{IV}N^{V})(N''N^{IV}N^{V})(N'''N^{IV}N^{V})u_\pi u_{\pi'} u_{\pi''} u_{\pi'''} u_{\pi''''} u_{\pi'''''}.$$

Cominciamo dalla forma I_N.

Da

$$N_x^4 u_\pi = (a\alpha u)a_x^2 \alpha_x^2,$$

si ottiene:

$$(NN'v)^4 u_\pi u_{\pi'} = (a\alpha u)(aNv)^2(\alpha N v)^2 u_\pi,$$

e per la formula

$$N_x^2 N_y^2 u_\pi = \frac{1}{2}(b\beta\pi)[b_x^2\beta_y^2 + \beta_x^2 b_y^2], \tag{60}$$

$$I_N = \frac{1}{2}(\alpha\beta v)^2(abv)^2(a\alpha u)(b\beta u) + \frac{1}{2}(a\beta v)^2(\alpha b v)^2(a\alpha u)(b\beta u),$$

ovvero:

$$2I_N = (\mathrm{K}\Theta u)^2 v_\xi^2 v_\zeta^2 - (\mathrm{H}\mathrm{H}'u)^2 v_\eta^2 v_{\eta'}^2. \tag{XVI}$$

Ponendo le v uguali alle u e ricordando che

$$(\mathrm{K}\Theta u)^2 u_\xi^2 u_\zeta^2 = -\frac{1}{6}SF + \frac{2}{3}\Sigma\mathrm{T}, \quad (\mathrm{H}\mathrm{H}'u)^2 u_\eta^2 u_{\eta'}^2 = -\frac{1}{6}SF + \frac{2}{3}\Sigma\mathrm{T}, \tag{127}$$

si ha:

$$(NN'u)^4 u_\pi u_{\pi'} = 0,$$

risultato ottenuto per altra via nella Memoria C a pag. 479.

§ 4. — La forma Θ_N.

La forma Θ_N deriva dalla formula

$$N_x'^2 N_y'^2 u_\pi = (a\alpha u)a_x \alpha_x a_y \alpha_y, \tag{60}$$

ponendo per le y i determinanti delle N, v e moltiplicando per $N_x^2 u_n$, cosicchè si ottiene:

$$\Theta_N = (a\alpha u)(aNv)(\alpha Nv)a_x \alpha_x N_x^2 u_n.$$

Differenziando la formula

$$N_x^2 N_y^2 u_n = (b\beta u)b_x \beta_x b_y \beta_y$$

rispetto alle y e moltiplicando per le z si ha:

$$N_x^2 N_y N_z u_n = \frac{1}{2}(b\beta u)b_x \beta_x [b_y \beta_z + b_z \beta_y],$$

e sostituendo le y pei determinanti delle a, v, le z pei determinanti delle α, v e moltiplicando per $(a\alpha u)a_x \alpha_x$:

$$\Theta_N = \frac{1}{2}(a\alpha u)(b\beta u)a_x \alpha_x b_x \beta_x [(bav)(\beta\alpha v) + (\beta av)(b\alpha v)] =$$

$$= \frac{1}{2}(a\alpha u)(b\beta u)a_x \alpha_x b_x \beta_x \{2(bav)(\beta\alpha v) + [(\beta av)(b\alpha v) - (bav)(\beta\alpha v)]\} =$$

$$= \frac{1}{2}(a\alpha u)(b\beta u)a_x \alpha_x b_x \beta_x [2(bav)(\beta\alpha v) - (b\beta v)(a\alpha v)]$$

$$= (a\alpha u)(b\beta u)(bav)(\beta\alpha v)a_x \alpha_x b_x \beta_x - \frac{1}{2} u_\eta v_\eta H_x^2 . u_{\eta'} v_{\eta'} H_x'^2.$$

Scambiando nel primo termine a con b e prendendo la semisomma si ottiene:

$$\frac{1}{2}(bav)(\beta\alpha v)a_x b_x \alpha_x \beta_x [(a\alpha u)(b\beta u) - (b\alpha u)(a\beta u)] =$$

$$= \frac{1}{2}(bav)(\beta\alpha v)(bau)(\beta\alpha u)a_x b_x \alpha_x \beta_x = \frac{1}{2} u_\vartheta v_\vartheta \Theta_x^2 . u_x v_x K_x^2;$$

si ha dunque:

$$\Theta_N = \frac{1}{2}(u_\vartheta v_\vartheta \Theta_x^2 . u_x v_x K_x^2 - u_\eta v_\eta H_x^2 . u_{\eta'} v_{\eta'} H_x'^2). \qquad \text{(XVII)}$$

§ 5. — La forma A_N.

Da

$$N = (a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2$$

si ottiene:

$$A_N = (NN'N'')^4 u_x u_{x'} u_{x''} = (a\alpha u)(aNN')^2(\alpha NN')^2 u_x u_{x'},$$

e applicando due volte la formula

$$N_x^2 N_y^2 u_x = \frac{1}{2}(b\beta u)[b_x^2\beta_y^2 + b_y^2\beta_x^2] = \frac{1}{2}(c\gamma u)[c_x^2\gamma_y^2 + c_y^2\gamma_x^2], \quad [C, (60)$$

$$4A_N = (abc)^2(\alpha\beta\gamma)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u) + 3(ab\gamma)^2(\alpha\beta c)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u)$$

ovvero, in virtù dei valori di Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 [*C.* pag. 462]:

$$4A_N = (\Delta\Delta_3 u)^3 + 3(\Delta_2\Delta_1 u)^3 = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

§ 6. — La forma Δ_N.

Si trova, applicando tre volte di seguito la formula (60):

$$8\Delta_N = (abc)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u)\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^2 + 3(ab\gamma)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u)\alpha_x^2\beta_x^2 c_x^2$$

$$+ 3(a\beta\gamma)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u)\alpha_x^2 b_x^2 c_x^2 + (\alpha\beta\gamma)^2(a\alpha u)(b\beta u)(c\gamma u)a_x^2 b_x^2 c_x^2,$$

e, per le formule precedentemente citate a pag. 462:

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x, \quad \Delta_1 = (ab\gamma)^2 a_x b_x \gamma_x = \frac{1}{6} S.f, \qquad \text{(XIX)}$$

$$\Delta_2 = (a\beta\gamma)^2 a_x\beta_x\gamma_x = \frac{T}{3}.f - \frac{S}{6}\Delta, \quad \Delta_3 = (\alpha\beta\gamma)^2\alpha_x\beta_x\gamma_x = -\frac{T}{3}\Delta + \frac{S^2}{12}.f,$$

$$8\Delta_N = -(\alpha\delta u)(\beta\delta u)(\gamma\delta u)\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^2$$

$$+ \frac{1}{2}S[(a\beta u)(b\beta u)(\alpha\beta u)\alpha_x^2 a_x^2 b_x^2 - (abu)(a\alpha u)(a\beta u)\alpha_x^2\beta_x^2 b_x^2]$$

$$-\frac{T}{3}[(a\alpha u)(b\alpha u)(c\alpha u)a_x^2 b_x^2 c_x^2 - 3(abu)(acu)(a\alpha u)\alpha_x^2 b_x^2 c_x^2 + \frac{S^2}{12}.(adu)(bdu)(cdu)a_x^2 b_x^2$$

Le tre parti che costituiscono il 2° membro si possono dedurre dalla forma

$$X = (adu)(bdu)(cdu)a_x^2 b_x^2 c_x^2$$

mediante l'applicazione successiva dell'operazione δ. Esprimiamo anzitutto la forma X mediante le forme del sistema completo. Si ha, per una nota identità:

$$X = \frac{1}{2}(adu)a_x^2 b_x c_x[(bdu)^2 c_x^2 + (cdu)^2 b_x^2 - (bcu)^2 d_x^2 - (bcd)^2 u_x^2 + 2(bcu)(bcd)d_x u_x]$$

$$= (adu)(bdu)^2 a_x^2 b_x . f - \frac{1}{2}(bcd)^2 (adu) a_x^2 b_x c_x . u_x^2 + (adu)(bcu)(bcd) a_x^2 b_x c_x d_x . u_x .$$

Di questi tre termini il primo è eguale a $-Q.f$, il secondo a $-\frac{1}{2}N.u_x^2$, il terzo è nullo, poichè uguale a

$$\frac{1}{3}(bcd)b_x c_x d_x . a_x^2 u_x[(adu)(bcu) - (abu)(dcu) - (acu)(bdu)]$$

$$= \frac{1}{3}(bcd)(abd)(cuu)b_x c_x d_x . a_x^2 u_x = 0 ;$$

cosicchè:

$$X = -Q.f - \frac{1}{2}N.u_x^2 . \tag{XX}$$

Le formule [C, (31)] dànno successivamente:

$$X_1 = \frac{1}{4}(a\alpha u)(b\alpha u)(c\alpha u)a_x^2 b_x^2 c_x^2 - \frac{3}{4}(abu)(acu)(a\alpha u)\alpha_x^2 b_x^2 c_x^2 ,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(a\beta u)(b\beta u)(\alpha\beta u)\alpha_x^2 b_x^2 a_x^2 - \frac{1}{2}(abu)(a\alpha u)(a\beta u)\alpha_x^2 \beta_x^2 b_x^2 ,$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(\alpha a u)(\beta a u)(\gamma a u)\alpha_x^2 \beta_x^2 \gamma_x^2 + \frac{3}{4}(\alpha\gamma u)(\beta\gamma u)(a\gamma u)\alpha_x^2 \beta_x^2 a_x^2 ,$$

$$X_4 = (\alpha\delta u)(\beta\delta u)(\gamma\delta u)\alpha_x^2 \beta_x^2 \gamma_x^2 .$$

La relazione (XX), scritta per la forma composta, diviene perciò:

$$\varkappa^4 (adu)(bdu)(cdu)a_x^2 b_x^2 c_x^2 +$$

$$+ \varkappa^3\lambda[(a\alpha u)(b\alpha u)(c\alpha u)a_x^2 b_x^2 c_x^2 - 3(abu)(acu)(a\alpha u)\alpha_x^2 b_x^2 c_x^2]$$

$$+ 3\varkappa^2\lambda^2[(a\beta u)(b\beta u)(\alpha\beta u)\alpha_x^2 b_x^2 a_x^2 - (abu)(a\alpha u)(a\beta u)\alpha_x^2\beta_x^2 b_x^2]$$

$$+ \varkappa\lambda^3[(\alpha a u)(\beta a u)(\gamma a u)\alpha_x^2\gamma_x^2\beta_x^2 + 3(\alpha\gamma u)(\beta\gamma u)(a\gamma u)a_x^2\alpha_x^2\beta_x^2]$$

$$+ \lambda^4(\alpha\delta u)(\beta\delta u)(\gamma\delta u)\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^2 =$$

$$-(\varkappa f + \lambda\Delta)(\varkappa^3 Q + 3\varkappa^2\lambda Q_1 + 3\varkappa\lambda^2 Q_2 + \lambda^3 Q_3) -$$

$$\frac{1}{2} u_x^2 N(\varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3} T\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12}\lambda^4),$$

ed uguagliando i coefficienti di $\varkappa^3\lambda$, $\varkappa^2\lambda^2$ e λ^4

$$\left.\begin{array}{l}
(a\alpha u)(b\alpha u)(c\alpha u)a_x^2 b_x^2 c_x^2 - 3(abu)(acu)(a\alpha u)\alpha_x^2 b_x^2 c_x^2 = -\Delta.Q - 3Q_1.f, \\
(a\beta u)(b\beta u)(\alpha\beta u)\alpha_x^2 a_x^2 b_x^2 - (abu)(a\alpha u)(a\beta u)\alpha_x^2\beta_x^2 b_x^2 \\
\qquad = -Q_2.f - Q_1.\Delta + \frac{S}{6} N.u_x^2, \\
(\alpha\delta u)(\beta\delta u)(\gamma\delta u)\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^2 = -\Delta.Q_3 + \frac{S^2}{24} N.u_x^2,
\end{array}\right\} \quad \text{(XXI)}$$

e sostituendo nel valore di Δ_N:

$$8\Delta_N = \Delta.Q_3 - 3\Delta_1.Q_2 + 3\Delta_2.Q_1 - \Delta_3.Q = (\Delta_{\varkappa\lambda}, Q_{\varkappa\lambda})^3. \quad \text{(XXII)}$$

Si ottiene così un nuovo combinante della forma ternaria cubica, invariante simultaneo delle due forme binarie cubiche in $\varkappa$ e λ, $\Delta_{\varkappa\lambda}$ e $Q_{\varkappa\lambda}$. (Cfr. *C.* pag. 470).

Sostituendo a Δ_1 Δ_2... i valori dati da (XIX) si ha:

$$8\Delta_N = \varphi.\Delta - \nabla.f, \quad \text{(XXIII)}$$

ov'è posto:

$$\varphi = (\alpha\beta u)^2(\alpha\gamma u)\beta_x\gamma_x^2 - \frac{1}{2} S.(abu)^2(a\alpha u)b_x\alpha_x^2 + \frac{1}{3} T.(abu)^2(acu)b_x c_x^2,$$

$$\nabla = -T.(abu)^2(a\alpha u)b_x\alpha_x^2 + \frac{1}{2} S.(a\alpha u)^2(\alpha\beta u)a_x\beta_x^2 + \frac{1}{12} S^2.(abu)^2(acu)b_x c_x^2.$$

Le forme φ e ∇ stanno nella relazione:

$$\delta\varphi = \nabla, \qquad \delta\nabla = \frac{1}{2} S.\varphi,$$

come dovea essere per la proprietà combinativa di Δ_N.

§ 7. — La forma tipica di Δ_N.

Nella Memoria A è dimostrato il seguente teorema:

« Ciascuna forma appartenente alla forma fondamentale f, moltiplicata per una conveniente potenza di

$$G(\Delta, -f) = \Delta^4 - S\Delta^2 f^2 + \frac{4}{3} T\Delta f^3 - \frac{1}{12} S^2 f^4,$$

è una funzione razionale intera delle 7 forme

$$f, \quad \Delta, \quad \psi, \quad \Omega, \quad u_x, \quad N, \quad K. »$$

Essendo Δ_N combinante, esso, moltiplicato per una certa potenza di G, dev'essere una funzione di ψ, Ω, u_x, N, K e delle f, Δ nella combinazione:

$$S_{\Delta,-f} = -6(G_{11} G_{22} - G_{12}^2) = S\Delta^4 - 4T\Delta^3 f + S^2\Delta^2 f^2 - \frac{2}{3} ST\Delta f^3 + \left(\frac{2}{3} T^2 - \frac{S^3}{12}\right) f^4.$$

Per ottenere questa funzione partiamo da alcune formule del § 9 della Memoria A, avvertendo che volendo uniformarci alla notazione di Gordan, bisogna alle

$$S, \; T, \; \Omega, \; N, \; \psi, \; Q, \; G(x, \lambda), \; S_{\Delta f}, \; T_{\Delta f}$$

sostituire risp. le

$$\frac{1}{6} S, \; \frac{1}{6} T, \; 24\Omega, \; 6N, \; 4\psi, \; 4K, \; G(x, -\lambda), \; \frac{1}{6} S_{\Delta,-f}, \frac{1}{6} T_{\Delta,-f};$$

epperò alle formule

$$\sum n_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = 12\, Q, \; \sum q_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = 2\Omega . u_x + 6\psi N, \; \sum n_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 8\Omega . u_x + 6\psi N,$$

$$\sum n_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 54(\psi^2 - S_{\lambda f}), \quad \sum q_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 18\psi\Omega,$$

$$\sum q_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 9(\psi^2 - S_{\lambda f})u_x + \frac{7}{6}N\Omega + 6\psi Q,$$

$$\sum n_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 6\Omega; \quad \sum q_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 12(\psi^2 - S_{\lambda f}),$$

le seguenti:

$$\sum n_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = \frac{4}{3}K, \quad \sum k_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = 2\Omega . u_x + 6\psi . N, \sum n_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = 8\Omega u_x + 6\psi$$

$$\sum n_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 6\psi^2 - \frac{1}{16}S_{\lambda,-f}, \sum k_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 18\psi\Omega,$$

$$\sum k_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = (9\psi^2 - \frac{3}{32}S_{\lambda,-f}).u_x + \frac{21}{2}\Omega N + 6\psi K,$$

$$\sum n_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 6\Omega, \quad \sum k_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 12\psi^2 - \frac{1}{8}S_{\lambda,-f}.$$

Dalle prime due si ottengono le tre:

$$\sum\sum n_i n_h \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_h} = 8\Omega . u_x; \quad \sum\sum n_i k_h \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_h} = (12\psi^2 - \frac{1}{8}S_{\lambda,-f})u_x + 6N$$

$$\sum\sum k_i k_h \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_h} = 3N(12\psi^2 - \frac{1}{8}S_{\lambda,-f}) + 12\Omega(3\psi u_x - K).$$

Ciò premesso, il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

moltiplicato pel quadrato del determinante

$$(x\,n\,k) = \frac{1}{4}\,G \qquad [A \text{ pag. } 62]$$

dà

$$\begin{array}{lll|} 12N, & 4K & 6(\Omega u_x+3\psi N) \\[2ex] 4K, & 8\,\Omega\,u_x & (12\psi^2-\frac{1}{8}S_{\Delta,-f})u_x+6N\Omega \\[2ex] \Omega u_x+3\psi N), & (12\psi^2-\frac{1}{8}S_{\Delta,-f})u_x+6N\Omega, & 3N(12\psi^2-\frac{1}{8}S_{\Delta,-f})+12\Omega(3\psi u_x-K) \end{array}$$

ovvero

$$G^2.\Delta_N = \Omega.\,Y + NX\,, \qquad \text{(XXIV)}$$

ove abbiamo posto:

$$Y = \frac{32}{3}K^3 - 32\,K^2\psi u_x + 32\,K\psi^2 u_x^2 - \frac{1}{3}K.\,S_{\Delta,-f}.\,u_x^2 - 16\,\Omega^2.\,u_x^3,$$

$$X = -48\,N\psi^2\Omega\,u_x - N\Omega\,S_{\Delta,-f}.\,u_x + 96\,\Omega^2\psi u_x^2 - 96\,\psi^4 u_x^2 - 48\,K\Omega^2 u_x$$
$$-\frac{1}{96}S_{\Delta,-f}^2.\,u_x^2 + 2\,\psi^2 S_{\Delta,-f}.\,u_x^2 - 24\,\Omega^2 N^2 + 96\,\psi^3 K u_x - \psi K S_{\Delta,-f}.\,u_x$$
$$+48\,NK\Omega\psi - 32\,\psi^2 K^2 + \frac{1}{3}K^2 S_{\Delta,-f}.$$

§ 8. — La forma J_N.

Da

$$N = (a\,\alpha\,u)\,a_x^2\alpha_x^2$$

si ottiene:

$$J_N = (NN'u)^2(NN''u)^2(N'N''u)^2 u_n u_{n'} u_{n''} = (a\alpha u)(aNu)^2(\alpha N'u)^2(NN'u)^2 u_n u_{n'}\,,$$

e applicando due volte la formula

$$N_x^2 N_y^2 u_n = \frac{1}{2}(a\,\alpha\,u)[a_x^2\alpha_y^2 + a_y^2\alpha_x^2]\,,$$

$$4\,J_N = 3\,(a\,b\,u)^2(c\,\alpha\,u)^2(\beta\,\gamma\,u)^2(a\,\alpha\,u)(b\,\beta\,u)(c\,\gamma\,u)$$
$$+ (a\,\beta\,u)^2(b\gamma u)^2(c\,\alpha\,u)^2(a\,\alpha\,u)(b\,\beta\,u)(c\,\gamma\,u)$$
$$= 3\,u_\zeta^2 u_\eta^2 u_x^2(\Theta\,\mathrm{H}\,u)(\Theta\,\mathrm{K}\,u)(\mathrm{H}\,\mathrm{K}\,u) + u_\eta^2 u_{\eta'}^2 u_{\eta''}^2(\mathrm{H}\,\mathrm{H}'u)(\mathrm{H}\,\mathrm{H}''u)(\mathrm{H}'\mathrm{H}''u),$$

ovvero, essendo nullo il secondo termine,

$$J_N = \frac{3}{4} u_\zeta^2 u_\eta^2 u_\chi^2 (\Theta \mathrm{H} u)(\Theta \mathrm{K} u)(\mathrm{H} \mathrm{K} u).$$

Questa forma, applicando la 1ª e la 3ª delle [C, (46)], diviene

$$2 u_\zeta^2 u_s^2 u_t^2 a_s b_t (\Theta a u)(\Theta b u)(a b u) - \frac{1}{6} S . u_\zeta^2 u_{\zeta'}^2 u_s^2 a_s (\Theta a u)(\Theta \Theta' u)(a \Theta' u),$$

ma il 2° di questi termini si annulla, epperò

$$J_N = \frac{3}{4} u_\zeta^2 u_s^2 u_t^2 (a b u)(\Theta a u)(\Theta b u)[a b (s t)] = u_\zeta^2 u_s^2 u_t^2 u_{\zeta'} (\zeta' s t)(\Theta \Theta' u)^2,$$

e finalmente per la (VIII):

$$J_N = \frac{3}{4} (p s t) u_p^5 u_s^2 u_t^2, \tag{XXV}$$

ch'è il noto combinante di 9ª classe.

§. 9. — La forma S_N.

Da

$$A_N = 0$$

e dalla relazione (*)

$$S_N = \frac{3}{2} (N N' N''')^2 (N' N'' N''')^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'} u_{n''} u_{n'''} - \frac{1}{2} A_N . N,$$

si conchiude:

$$S_N = \frac{3}{2} (N N' N''')^2 (N' N'' N''')^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'} u_{n''} u_{n'''}.$$

Applicando successivamente la formula:

$$N_x^2 N_y^2 u_n = \frac{1}{2} (a \alpha u)[a_x^2 \alpha_y^2 + a_y^2 \alpha_x^2],$$

e servendosi dei valori di Δ_1, Δ_2 .... dati dalle (XIX) si ottiene:

(*) Vedi la mia Memoria cit.

$$\frac{16}{3} S_N = (\Delta_1 \Delta_3 u)^2 (\Delta_1 a u)(\Delta_3 b u) a_x^2 b_x^2 - (\Delta_2 \Delta_2' u)^2 (\Delta_2 a u)(\Delta_2' b u) a_x^2 b_x^2$$

$$+ (\Delta \Delta_2 u)^2 (\Delta \alpha u)(\Delta_2 \beta u) \alpha_x^2 \beta_x^2 - (\Delta_1 \Delta_1' u)^2 (\Delta_1 \alpha u)(\Delta_1' \beta u) \alpha_x^2 \beta_x^2$$

$$+ (\Delta_1 \Delta_2 u)^2 (\Delta_1 a u)(\Delta_2 \beta u) a_x^2 \beta_x^2 - (\Delta \Delta_3 u)^2 (\Delta \beta u)(\Delta_3 a u) a_x^2 \beta_x^2$$

$$= \frac{1}{72}(S^3 - 8 \dot{T}^2)(\Theta f u)(\Theta f' u) + \frac{ST}{18}[(\Theta f u)(\Theta \Delta u) + (\mathrm{H} f u)(\mathrm{H} f' u)]$$

$$- \frac{1}{36} S^2 [(\Theta \Delta u)(\Theta \Delta' u) + (\mathrm{K} f u)(\mathrm{K} f' u) + 4(\mathrm{H} f u)(\mathrm{H} \Delta u)]$$

$$+ \frac{T}{3}[(\mathrm{H} \Delta u)(\mathrm{H} \Delta' u) + (\mathrm{K} f u)(\mathrm{K} \Delta u)] - \frac{1}{6} S . (\mathrm{K} \Delta u)(\mathrm{K} \Delta' u),$$

e abbiamo posto:

$$(\Theta f u)(\Theta f' u) = u_{\mathfrak{z}}^2 (\Theta a u)(\Theta b u) a_x^2 b_x^2 \text{ etc.}$$

Per esprimere tutto in funzione delle forme del sistema completo …iamo dalla forma

$$Z = (\Theta a u)(\Theta b u) u_{\mathfrak{z}}^2 a_x^2 b_x^2 ,$$

…quale, applicando una nota identità, è uguale a

$$\ldots b_x u_{\mathfrak{z}}^2 [(\Theta a u)^2 b_x^2 + (\Theta b u)^2 a_x^2 - (a b \Theta)^2 u_x^2 - (a b u)^2 \Theta_x^2 + 2(a b u)(a b \Theta) \Theta_x u_x]$$

$$= (\Theta a u)^2 a_x u_{\mathfrak{z}}^2 . f - \frac{1}{2} \Theta_{\mathfrak{z}}^2 \Theta_x'^2 u_{\mathfrak{z}}^2 . u_x^2 - \frac{1}{2} \Theta^2 + (a b u)(a b \Theta) a_x b_x u_{\mathfrak{z}}^2 \Theta_x . u_x .$$

Si ha intanto per la formula (X)

$$(\Theta a u)^2 a_x u_{\mathfrak{z}}^2 = \frac{1}{3} \Sigma . u_x ,$$

…i ha inoltre:

$$\Theta_{\mathfrak{z}}^2 \Theta_x'^2 u_{\mathfrak{z}}^2 = \frac{1}{6} S . u_x^2 , \qquad [C, \text{pag. } 447]$$

$$(a b u)(a b \Theta) a_x b_x u_{\mathfrak{z}}^2 \Theta_x = \frac{1}{3} f . \Sigma - \mathrm{H} . u_x ; \qquad [C, (47)]$$

dunque

$$Z = -\frac{1}{2}\Theta^2 + \frac{2}{3}f.\Sigma.u_x - \mathrm{H}.u_x^2 - \frac{1}{12}S.u_x^4. \qquad \text{(XXVI)}$$

Per le formule $[C, (31)]$ si ha successivamente

$$Z_1 = \frac{1}{2}[(\mathrm{H}fu)(\mathrm{H}fu) + (\Theta fu)(\Theta\Delta u)],$$

$$Z_2 = \frac{1}{6}[(\Theta\Delta u)(\Theta\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}fu) + 4(\mathrm{H}fu)(\mathrm{H}\Delta u)],$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}[(\mathrm{H}\Delta u)(\mathrm{H}\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}\Delta u)],$$

$$Z_4 = (\mathrm{K}\Delta u)(\mathrm{K}\Delta' u),$$

e scrivendo la relazione (XXVI) per la forma composta $\varkappa f + \lambda\Delta$:

$$\varkappa^4(\Theta fu)(\Theta f' u) + 2\varkappa^3\lambda[(Hfu)(Hf' u) + (\Theta fu)(\Theta\Delta u)] +$$

$$+ \varkappa^2\lambda^2[(\Theta\Delta u)(\Theta\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}f' u) + 4(\mathrm{H}fu)(\mathrm{H}\Delta u)]$$

$$+ 2\varkappa\lambda^3[(\mathrm{H}\Delta u)(\mathrm{H}\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}\Delta u)] + \lambda^4(\mathrm{K}\Delta u)(\mathrm{K}\Delta' u) =$$

$$-\frac{1}{2}(\varkappa^2\Theta + 2\varkappa\lambda\mathrm{H} + \lambda^2\mathrm{K})^2 + \frac{2}{3}u_x(\varkappa f + \lambda\Delta)$$

$$[(\varkappa^3 + \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{2}{3}T\lambda^3)\Sigma + (3\varkappa^2\lambda - \frac{S}{2}\lambda^3)\mathrm{T}]$$

$$- u_x^2[(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3)(\varkappa\mathrm{H} + \lambda\mathrm{K}) + \left(\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\lambda^3\right)(\varkappa\Theta + \lambda\mathrm{H})]$$

$$-\frac{1}{12}u_x^4[S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \frac{2}{3}ST\varkappa\lambda^3 + \left(\frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{12}S^3\right)\lambda^4],$$

ed uguagliando i coefficienti dei termini in $\varkappa$ e λ:

$$\left.\begin{aligned}
&(\Theta f u)(\Theta f' u) = -\frac{1}{2}\Theta^2 + \frac{2}{3}f.\Sigma.u_x - \mathrm{H}.u_x^2 - \frac{1}{12}S.u_x^4,\\
&(\mathrm{H}fu)(\mathrm{H}f'u) + (\Theta f u)(\Theta\Delta u) = -\Theta\mathrm{H} + \frac{1}{3}\Delta.\Sigma.u_x + f.\mathrm{T}.u_x\\
&\qquad -\frac{S}{2}\Theta.u_x^2 - \frac{1}{6}T.u_x^4,\\
&(\Theta\Delta u)(\Theta\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}f'u) + 4(\mathrm{H}fu)(\mathrm{H}\Delta u) = -2\mathrm{H}^2 - \Theta.\mathrm{K}\\
&\qquad + \frac{1}{3}S.f.\Sigma u_x + 2\Delta.\mathrm{T}.u_x - T.\Theta.u_x^2 - \frac{1}{12}S.u_x^4,\\
&(\mathrm{H}\Delta u)(\mathrm{H}\Delta' u) + (\mathrm{K}fu)(\mathrm{K}\Delta u) = -\mathrm{H}.\mathrm{K} + \frac{2}{9}T.f.\Sigma u_x\\
&\qquad + \frac{1}{6}S.\Delta.\Sigma.u_x - \frac{1}{6}S.f\mathrm{T}.u_x + \frac{S}{4}.\mathrm{K}.u_x^2 - \frac{1}{3}T.\mathrm{H}.u_x^2\\
&\qquad - \frac{1}{24}S^2.\Theta.u_x^2 - \frac{S}{36}T.u_x^4,\\
&(\mathrm{K}\Delta u)(\mathrm{K}\Delta' u) = -\frac{1}{2}\mathrm{K}^2 + \frac{4}{9}T.\Delta.\Sigma.u_x - \frac{1}{3}S.\Delta.\mathrm{T}.u_x\\
&\qquad + \frac{1}{3}T.\mathrm{K}.u_x^2 - \frac{S^2}{12}.\mathrm{H}.u_x^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{12}S^3\right)u_x^4.
\end{aligned}\right\}\ \text{(XXVII)}$$

Sostituendo nel valore di S_N si ha:

$$\frac{16}{3}S_N = \left(\frac{1}{18}T^2 - \frac{1}{144}S^3\right)\Theta^2 + \frac{1}{18}S^2.\mathrm{H}^2 + \frac{1}{12}S.\mathrm{K}^2$$
$$-\frac{1}{18}S.\mathrm{T}.\Theta.\mathrm{H} + \frac{S^2}{36}\Theta.\mathrm{K} - \frac{T}{3}\mathrm{HK}.$$

Si ottiene in tal modo un nuovo combinante della forma ternaria cubica, il quale non differisce che per un fattore numerico dall'invariante i della forma binaria biquadratica in $\varkappa$ e λ, $\mathrm{H}_{\varkappa\lambda}$; si ha infatti la notevole relazione

$$S_N = \frac{1}{16}i_{\mathrm{H}\varkappa\lambda}. \qquad \text{(XXVIII)}$$

§ 10. — La forma p_N.

Questa forma si ottiene, applicando quattro volte di seguito formula

$$N_x^2 N_y^2 u_x = \frac{1}{2}(a\alpha u)[a_x^2\alpha_y^2 + a_y^2\alpha_x^2]$$

e introducendo i valori di Δ_1, Δ_2 ...; e si trova:

$$8p_N = (\Delta\Delta_2 u)^2(\Delta K u)(\Delta_2 K u) - (\Delta_1\Delta_1' u)^2(\Delta_1 K u)(\Delta_1' K u) + (\Delta_1\Delta_3 u)^2(\Delta_1\Theta u)(\Delta_3\Theta u)$$

$$-(\Delta_2\Delta_2' u)^2(\Delta^2\Theta u)(\Delta_2'\Theta u) + (\Delta_1\Delta_2 u)^2(\Delta_1 H u)(\Delta_2 H u) - (\Delta\Delta_3 u)^2(\Delta H u)(\Delta_3 H u)$$

$$= \left(-\frac{T^2}{9} + \frac{S^2}{72}\right)[\Theta\Theta] + \frac{ST}{9}[\Theta H] - \frac{S^2}{18}[\Theta K] - \frac{S^2}{9}[HH]$$

$$+ \frac{2T}{3}[HK] - \frac{S}{6}[KK],$$

ovvero per le formule [C, (127)]:

$$p_N = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}RF + T\Gamma^2 - \frac{1}{3}S^2\Sigma T + \frac{1}{6}ST\Sigma^2\right) = \frac{1}{12}\Phi, \tag{XXIX}$$

giusta l'espressione di Φ data a pag. 512 della Mem. C.

La proprietà combinantiva di questa forma viene messa in evidenza dalla notevole relazione

$$\Phi = -\frac{1}{4}(S_{x\lambda}, F_{x\lambda})^4. \tag{XXX}$$

§ 11. — La forma B_N.

Applicando la solita formula [C, (60)] si ha:

$$8B_N = (\Delta\Delta_2 u)^2(\Delta_1\Delta_3 u)^2(\Delta\Delta_1 u)(\Delta_2\Delta_3 u) - (\Delta_1\Delta_1 u)^2(\Delta_1''\Delta_3 u)^2(\Delta_1'\Delta_1'' u)(\Delta_1\Delta_3 u)$$

$$+ (\Delta_1\Delta_1' u)^2(\Delta_2\Delta_2' u)^2(\Delta_1\Delta_2 u)(\Delta_1'\Delta_2' u) - (\Delta\Delta_2 u)^2(\Delta_2'\Delta_2'' u)^2(\Delta\Delta_2'' u)(\Delta_2\Delta_2' u)$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta\Delta_3 u)^2(\Delta_1\Delta_2 u)^2(\Delta\Delta_2 u)(\Delta_3\Delta_1 u) - \frac{1}{4}(\Delta\Delta_3 u)_2(\Delta'\Delta_3' u)^2(\Delta\Delta_3' u)(\Delta_3\Delta' u)$$

$$- \frac{1}{4}(\Delta_1\Delta_2 u)^2(\Delta_1'\Delta_2' u)^2(\Delta_1\Delta_2' u)(\Delta_2\Delta_1' u),$$

ovvero, facendo uso dei valori di Δ_1, Δ_2 ... etc.

$$B_N = \frac{1}{2.12^3} R. \{S^2[\Theta\Theta] + 8S[\mathrm{H}\,\mathrm{H}] - 12[\mathrm{K}\mathrm{K}] - 16\,T[\Theta\mathrm{H}] + 4S[\Theta\mathrm{K}]\}.$$

La quantità dentro parentesi si annulla in virtù delle formule [C, (127)], epperò:

$$B_N = 0. \tag{XXXI}$$

Parte seconda — La curva $N = 0$.

§. 1. — La forma canonica di N.

Partendo dalla forma canonica di f:

$$f = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6b\,x_1 x_2 x_3\,,$$

si trova:

$$\Delta = 6(a^3 + 2b^3)x_1x_2x_3 - 6ab^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = \alpha(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\beta x_1x_2x_3$$

$$N = 2(b\alpha - a\beta)[x_1^3(u_2x_2 - u_3x_3) + x_2^3(u_3x_3 - u_1x_1) + x_3^3(u_1x_1 - u_2x_2)], \tag{XXXII}$$

e indicando con N_1, N_{12}, etc. le derivate:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial N}{\partial x_1}, \qquad \frac{1}{12}\frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ etc.},$$

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= u_1(x_2^3 - x_3^3) + 3x_1^2(u_3x_3 - u_2x_2),\\
N_2 &= u_2(x_3^3 - x_1^3) + 3x_2^2(u_1x_1 - u_3x_3),\\
N_3 &= u_3(x_1^3 - x_2^3) + 3x_3^2(u_2x_2 - u_1x_1),\\
N_{11} &= 2x_1(u_3x_3 - u_2x_2),\quad N_{22} = 2x_2(u_1x_1 - u_3x_3),\\
N_{33} &= 2x_3(u_2x_2 - u_1x_1),\\
N_{23} &= u_2x_3^2 - u_3x_2^2,\ N_{31} = u_3x_1^2 - u_1x_3^2,\ N_{12} = u_1x_2^2 - u_2x_1^2.
\end{aligned}\right\} \text{(XXXIII)}$$

dalle quali segue:

$$\frac{1}{2}\Delta_\psi = x_1 x_2 x_3 . \varphi - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) . \psi , \qquad \text{(XXXIV)}$$

ove abbiamo posto:

$$\varphi = (u_2^3 - u_3^3)x_1^3 + (u_3^3 - u_1^3)x_2^3 + (u_1^3 - u_2^3)x_3^3 -$$

$$- 3u_1^2 x_1^2 (u_2 x_2 - u_3 x_3) - 3u_2^2 x_2^2 (u_3 x_3 - u_1 x_1) - 3u_3^2 x_3^2 (u_1 x_1 - u_2 x_2),$$

$$\psi = u_1 x_1^2 (u_2^2 x_3 - u_3^2 x_2) + u_2 x_2^2 (u_3^2 x_1 - u_1^2 x_3) + u_3 x_3^2 (u_1^2 x_2 - u_2^2 x_1).$$

Dalla stessa forma canonica di f si ha, a meno d'un fattore numerico,

$$N = (stx)u_s^2 u_t^2 = u_1 x_1 (u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2 (u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3 (u_1^3 - u_2^3), \qquad \text{(XXXV)}$$

forma duale di N, dalla quale deriva, scambiando le x colle u.

Formando la jacobiana delle tre forme:

$$\varphi, \quad \psi, \quad N$$

si trova:

$$(\varphi \psi N) = -2(u_2^3 - u_3^3)(u_3^3 - u_1^3)(u_1^3 - u_2^3).$$

$$.[x_1^3 (u_2 x_2 - u_3 x_3) + x_2^3 (u_3 x_3 - u_1 x_1) + x_3^3 (u_1 x_1 - u_2 x_2)] \qquad \text{(XXXVI)}$$

$$= \frac{1}{36}(NN'u)^2 (NN''u)^2 (N'N''u)^2 u_n u_{n'} u_{n''} . N.$$

Rispetto alle due forme φ e ψ si ha la notevole proprietà

$$(\varphi \psi v)^3 \equiv 0 , \qquad \text{(XXXVII)}$$

si trova infatti, indicando con Δ_ψ l'essiana di ψ:

$$\Delta_\psi = u_1^2 u_2^2 u_3^2 . \varphi + (u_2^3 u_3^3 + u_3^3 u_1^3 + u_1^3 u_2^3) . \psi .$$

Dalla forma canonica di N si hanno infine i seguenti risultati

$$A_N = 0\,; \quad B_N = 0\,; \quad \text{[Cfr. (XVIII) e (XXXI)]}$$

$$\begin{aligned} J_N = (NN'v)^4 u_n u_{n'} &= u_2 u_3 v_1^4 + u_3 u_1 v_2^4 + u_1 u_2 v_3^4 \\ &+ u_2 u_3 v_1 (v_2^3 + v_3^3) + u_3 u_1 v_2 (v_3^3 + v_1^3) + u_1 u_2 v_3 (v_1^3 + v_2^3) - \\ &- 3 v_1 v_2 v_3 (u_1^2 v_1 + u_2^2 v_2 + u_3^2 v_3)\,; \end{aligned} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

si ha infatti, ponendo le v uguali alle u:

$$(NN'u)^4 u_n u_{n'} \equiv 0\,;$$

$$\frac{1}{24} (NN'v)^2 (NN''v)^2 (N'N''v)^2 u_n u_{n'} u_{n''} =$$

$$\begin{aligned} &= u_2 u_3 v_2 v_3 (u_3 v_2^4 - u_2 v_3^4) + u_3 u_1 v_3 v_1 (u_1 v_3^4 - u_3 v_1^4) + u_1 u_2 v_1 v_2 (u_2 v_1^4 - u_1 v_2^4) \\ &+ (u_2^3 - u_3^3) v_2^3 v_3^3 + (u_3^3 - u_1^3) v_3^3 v_1^3 + (u_1^3 - u_2^3) v_1^3 v_2^3 \\ &+ 2 u_2 u_3 v_2^2 v_3^2 (u_2 v_2^2 - u_3 v_3^2) + u_3 u_1 v_3^2 v_1^2 (u_3 v_3^2 - u_1 v_1^2) \\ &+ u_1 u_2 v_1^2 v_2^2 (u_1 v_1^2 - u_2 v_2^2) \end{aligned}$$

$$\ldots{}_2 v_3 [u_1^2 v_2 v_3 (u_3 v_2 - u_2 v_3) + u_2^2 v_3 v_1 (u_1 v_3 - u_3 v_1) + u_3^2 v_1 v_2 (u_2 v_1 - u_1 v_2)]\,; \qquad \text{(XXXIX)}$$

si ha infatti ponendo le v uguali alle u:

$$(NN'u)^2 (NN''u)^2 (N'N''u)^2 u_n u_{n'} u_{n''} = 72 (u_2^3 - u_3^3)(u_3^3 - u_1^3)(u_1^3 - u_2^3)\,,$$

che si accorda colla formula (XXV), giusta il significato geometrico del combinante $(pst) u_p^5 u_s^2 u_t^2$.

$$\begin{aligned} S_N = &- u_1^2 u_2 u_3 x_1^4 - u_2^2 u_3 u_1 x_2^4 - u_3^2 u_1 u_2 x_3^4 \\ &- (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)(u_1 x_2^2 x_3^2 + u_2 x_3^2 x_1^2 + u_3 x_1^2 x_2^2) \\ &+ 2 u_1 u_2 u_3 [x_2 x_3 (u_2 x_3^2 + u_3 x_2^2) + x_3 x_1 (u_3 x_1^2 + u_1 x_3^2) + x_1 x_2 (u_2 x_1^2 + u_1 x_2^2)]\,; \end{aligned} \qquad \text{(XL)}$$

$$
\begin{aligned}
T_N = & -4u_1^3(u_2^3+u_3^3)x_1^6-4u_2^3(u_3^3+u_1^3)x_2^6-4u_3^3(u_1^3+u_2^3)x_3^6 \\
& +8u_2^2u_3(u_3^3+2u_1^3)x_2^5x_3+8u_3^2u_2(u_2^3+2u_1^3)x_3^5x_2+8u_3^2u_1(u_1^3+2u_2^3)x_3^5x_1 \\
& +8u_1^2u_3(u_3^3+2u_2^3)x_1^5x_3+8u_1^2u_2(u_2^3+2u_3^3)x_1^5x_2+8u_2^2u_1(u_1^3+2u_3^3)x_2^5x_1 \\
& -4u_2^2u_3(u_2^3+2u_3^3+9u_1^3)x_2^2x_3^4-4u_3^2u_2(u_3^3+2u_2^3+9u_1^3)x_2^4x_3^2 \\
& -4u_3^2u_1(u_3^3+2u_1^3+9u_2^3)x_1^4x_3^2-4u_1^2u_3(u_1^3+2u_3^3+9u_2^3)x_1^2x_3^4 \qquad \text{(XLI)} \\
& -4u_1^2u_2(u_1^3+2u_2^3+9u_3^3)x_1^2x_2^4-4u_2^2u_1(u_2^3+2u_1^3+9u_3^3)x_2^2x_1^4 \\
& +8(2u_2^3u_3^3+3u_1^3u_2^3+3u_1^3u_3^3-u_1^6)x_2^3x_3^3+8(2u_3^3u_1^3+3u_2^3u_3^3+3u_2^3u_1^3-u_2^6)x_3^3x_1^3 \\
& +8(2u_1^3u_2^3+3u_3^3u_1^3+3u_3^3u_2^3-u_3^6)x_1^3x_2^3-8u_1u_2u_3(4u_2^3+u_3^3+u_1^3)x_1^4x_2x_3 \\
& -8u_1u_2u_3(4u_3^3+u_1^3+u_2^3)x_2^4x_3x_1-8u_1u_2u_3(4u_1^3+u_2^3+u_3^3)x_3^4x_1x_2 \\
& +8u_2^2u_3(u_1^3-u_2^3+3u_3^3)x_1^3x_2^2x_3+8u_3^2u_2(u_1^3-u_3^3+3u_2^3)x_1^3x_3^2x_2 \\
& +8u_3^2u_1(u_2^3-u_3^3+3u_1^3)x_2^3x_3^2x_1+8u_1^2u_3(u_2^3-u_1^3+3u_3^3)x_2^3x_1^2x_3 \\
& +8u_1^2u_2(u_3^3-u_1^3+3u_2^3)x_3^3x_1^2x_2+8u_2^2u_1(u_3^3-u_2^3+3u_1^3)x_3^3x_2^2x_1 \\
& -78u_1^2u_2^2u_3^2x_1^2x_2^2x_3^2.
\end{aligned}
$$

§ 2. — INTERPRETAZIONI GEOMETRICHE.

I risultati precedenti si possono convenientemente applicare allo studio delle principali proprietà della curva del 4° ordine (*):

$$N=(a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2=0. \quad (u \text{ costante})$$

(*) Di questa curva si occupò il compianto Professore Caporali, il quale in una breve comunicazione fatta nel Dicembre del 1882 enunciò parecchi dei teoremi dimostrati in questo paragrafo.

Questa curva non ha punti doppi e i suoi 24 flessi si separano in due gruppi, ognuno dei quali, giusta le (XXXII) e (XXXVI), è costituito dai vertici dei triangoli sizigetici appartenenti ad un fascio sizigetico di curve del 3° ordine; i fasci sono

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0 \quad e \quad \mu\varphi + \nu\nabla = 0.$$

La curva $N = 0$ è jacobiana delle tre curve:

$$f \equiv a_x^3 = 0, \qquad \Delta \equiv \alpha_x^3 = 0, \qquad u_x = 0,$$

ovvero, supponendo $f_N \gtrless 0$, delle tre:

$$\varphi = 0, \qquad \nabla = 0, \qquad N = 0,$$

giusta la formula (XXXVI).

I 12 flessi di ciascun gruppo sono situati, giusta la teoria delle curve del 3° ordine, quattro a quattro sulle nove rette armoniche del fascio sizigetico. Ciò viene confermato dalla formula

$$G^2 . \Delta_N = \Omega . Y + N . X,$$

ricordando che

$$\Omega = 0 \quad e \quad G = 0$$

sono le equazioni delle 9 rette armoniche, e dei quattro triangoli sizigetici. Infatti i punti comuni alle due curve:

$$N = 0 \quad e \quad \Omega = 0$$

sono comuni alle due

$$\Delta_N = 0 \quad e \quad G = 0;$$

essi sono dunque i vertici dei triangoli sizigetici, i quali sono contati tre volte nell'equazione $\Omega = 0$, due volte nell'equazione $G^2 = 0$, epperò entrano semplicemente frai punti d'intersezione delle due curve

$$N = 0 \quad e \quad \Delta_N = 0.$$

I 12 flessi del 1° gruppo sono indipendenti dalla retta u, epperò sono comuni alle curve della rete

$$(a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2 = 0\,; \qquad (u \text{ variabile})$$

naturalmente variano le tangenti d'inflessione.

L'essiana di N, giusta la formula (XXIII), passa pei punti base dei due fasci sizigetici

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0, \quad \mu\varphi + \nu\nabla = 0$$

proiettivi, che generano l'essiana stessa. Inoltre per la (XXXIV) la cubica $\nabla = 0$ del fascio (μ, ν) passa pei vertici di un triangolo sizigetico del fascio $(\varkappa, \lambda)$. Riferendo la curva $N = 0$ agli altri tre triangoli sizigetici del fascio $(\varkappa, \lambda)$ si ripete la stessa proprietà; cosicchè nel fascio (μ, ν) esistono 4 curve che passano rispettivamente pei vertici dei triangoli sizigetici del fascio $(\varkappa, \lambda)$, e reciprocamente.

Le quattro tangenti d'inflessione dei flessi che stanno sopra una retta armonica incontrano ulteriormente la curva $N = 0$, in virtù d'un noto teorema, in 4 punti della stessa retta. Si otterrebbero così 9 rette corrispondenti alle 9 rette armoniche, ma è facile vedere ch'esse coincidono nella stessa retta

$$N \equiv (stx)u_s^2u_t^2 = 0.$$

Riferendo la curva $N = 0$ agli altri tre triangoli sizigetici del fascio

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0,$$

cioè posto:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3,\ y_3 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3, \\
\text{ovv.} \\
y_1 = x_1 + \varepsilon x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + x_2 + \varepsilon x_3,\ y_3 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^2 x_3, \\
\text{ovv.} \\
y_1 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + x_2 + \varepsilon^2 x_3,\ y_3 = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_3,
\end{array}\right\} \text{(XLII)}$$

e posto rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ v_2 = u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon u_3,\ \ v_3 = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_3, \\ w_1 = u_1 + \varepsilon^2 u_2 + u_3,\ \ w_2 = u_1 + u_2 + \varepsilon^2 u_3,\ \ w_3 = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon u_3, \\ r_1 = u_1 + \varepsilon u_2 + u_3,\ \ r_2 = u_1 + u_2 + \varepsilon u_3,\ \ r_3 = u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 u_3, \end{array}\right\} \text{(XLIII)}$$

si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} y_1^3(v_2y_2 - v_3y_3) + y_2^3(v_3y_3 - v_1y_1) + y_3^3(v_1y_1 - v_2y_2) = 9\varepsilon(1-\varepsilon).\,N, \\ y_1^3(w_2y_2 - w_3y_3) + y_2^3(w_3y_3 - w_1y_1) + y_3^3(w_1y_1 - w_2y_2) = -9\varepsilon(1-\varepsilon).N, \\ y_1^3(r_2y_2 - r_3y_3) + y_2^3(r_3y_3 - r_1y_1) + y_3^3(r_1y_1 - r_2y_2) = 9\varepsilon(1-\varepsilon).N, \end{array}\right\} \text{(XLIV)}$$

dove le y non hanno lo stesso significato nelle tre relazioni.

La equazione della curva $N = 0$ può mettersi dunque sotto altre tre forme analoghe alla (XXXII), le quali permettono d'enunciare la seguente proprietà:

« Le tre tangenti d'inflessione nei vertici d'ogni triangolo sizige-
« tico concorrono in un punto ».

Calcoliamo le coordinate di questi quattro punti.

Esprimendo le nuove coordinate y in funzione delle antiche si ha rispettivamente, giusta le formule (XLII) e (XLIII):

$$v_2y_2 - v_3y_3 = \varepsilon(\varepsilon - 1)[x_1(u_2 - u_3) + x_2(u_3 - u_1) + x_3(u_1 - u_2)]$$

$$v_3y_3 - v_1y_1 = \varepsilon^2(\varepsilon - 1)[x_1(\varepsilon u_2 - u_3) + x_2(\varepsilon u_3 - u_1) + x_3(\varepsilon u_1 - u_2)]$$

$$v_1y_1 - v_2y_2 = \varepsilon^2(\varepsilon - 1)[x_1(u_2 - \varepsilon u_3) + x_2(u_3 - \varepsilon u_1) + x_3(u_1 - \varepsilon u_2)]$$

e il punto d'incontro P_2 ha le coordinate

$$(P_2): \qquad x_1 : x_2 : x_3 = u_2u_3 - u_1^2 : u_3u_1 - u_2^2 : u_1u - u_3^2;$$

$$w_2y_2 - w_3y_3 = (\varepsilon - 1)[-x_1(u_2 - \varepsilon u_3) - \varepsilon^2 x_2(u_3 - u_1) - x_3(\varepsilon u_1 - u_2)]$$

$$w_3 y_3 - w_1 y_1 = (\varepsilon - 1)[-x_1(\varepsilon u_2 - u_3) - x_2(u_3 - \varepsilon u_1) - \varepsilon^2 x_3(u_1 - u_2)]$$

$$w_1 y_1 - w_2 y_2 = (\varepsilon - 1)[-x_1 \varepsilon^2(u_2 - u_3) - x_2(\varepsilon u_3 - u_1) - x_3(u_1 - \varepsilon u_2)]$$

$$(P_3): \quad x_1 : x_2 : x_3 = u_2 u_3 - \varepsilon u_1^2 : u_3 u_1 - \varepsilon u_2^2 : u_1 u_2 - \varepsilon u_3^2 ;$$

$$r_2 y_2 - r_3 y_3 = (\varepsilon - 1)[\varepsilon x_1(\varepsilon u_2 - u_3) + x_2(u_3 - u_1) + \varepsilon x_3(u_1 - \varepsilon u_2)]$$

$$r_3 y_3 - r_1 y_1 = (\varepsilon - 1)[\varepsilon x_1(u_2 - \varepsilon u_3) + \varepsilon x_2(\varepsilon u_3 - u_1) + x_3(u_1 - u_2)]$$

$$r_1 y_1 - r_2 y_2 = (\varepsilon - 1)[x_1(u_2 - u_3) + \varepsilon x_2(u_3 - \varepsilon u_1) + \varepsilon x_3(\varepsilon u_1 - u_2)]$$

$$(P_4): \quad x_1 : x_2 : x_3 = u_2 u_3 - \varepsilon^2 u_1^2 : u_3 u_1 - \varepsilon^2 u_2^2 : u_1 u_2 - \varepsilon^2 u_3^2 .$$

Le coordinate del punto P_1 relativo alla forma (XXXII) sono evidentemente

$$(P_1): \qquad x_1 : x_2 : x_3 = u_2 u_3 : u_3 u_1 : u_1 u_2 .$$

I punti P_1, P_2, P_3, P_4 formano un gruppo equianarmonico ed appartengono alla retta

$$\mathrm{N} \equiv u_1 x_1(u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2(u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3(u_1^3 - u_2^3) = 0 ,$$

la quale appartiene perciò all'inviluppo equianarmonico :

$$I_N = (NN'v)^4 u_n u'_n = 0 .$$

Resta dunque dimostrato il teorema :

« Le quattro tangenti d'inflessione dei flessi situati sopra ciascuna « delle rette armoniche incontrano ulteriormente la curva $N = 0$ nei « punti in cui questa è segata dalla retta $\mathrm{N} = 0$ ».

Abbiamo finora supposto [Cfr. formula (XXXVI)]

$$J_N = 72(u_2^3 - u_3^3)(u_3^3 - u_1^3)(u_1^3 - u_2^3) \gtrless 0 ,$$

cioè abbiamo supposto che la retta $u_x = 0$ non passi per uno dei flessi del fascio sizigetico

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0.$$

La curva $N = 0$ non ha punti doppi. Il suo discriminante posto uguale a zero dà un inviluppo della 27^a classe alle cui tangenti u corrispondono curve della rete

$$(a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2 = 0 \qquad (u \text{ variabile})$$

con un punto doppio. Intanto è facile vedere che questo discriminante contiene a fattore il discriminante della forma fondamentale f, cioè R. Infatti se è $R = 0$ si può scrivere:

$$f \equiv x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 = 0,$$

da cui:

$$-\frac{1}{2}\Delta \equiv 3x_1^3 + 3x_2^3 - 6x_1x_2x_3 = 0,$$

$$-\frac{1}{2}N \equiv u_3x_3(x_1^3 - x_2^3) + x_1x_2(u_1x_2^2 - u_2x_1^2) = 0,$$

e la curva $N = 0$ acquista un punto triplo nel vertice $x_1 = x_2 = 0$.

Il discriminante D_N della forma N si annulla se la retta u passa per un flesso del fascio $(\varkappa, \lambda)$. Infatti questo flesso, punto comune alle tre curve

$$f \equiv a_x^3 = 0, \qquad \Delta \equiv \alpha_x^3 = 0, \qquad u_x = 0,$$

dev'essere doppio per la loro jacobiana $N = 0$, anzi, essendo $J_N = 0$, la retta u appartiene all'inviluppo armonico di N, epperò il flesso diviene punto triplo per la curva $N = 0$; cosicchè di quell'inviluppo di 27^a classe fanno parte i 9 flessi del fascio $(\varkappa, \lambda)$. Ma è facile vedere che ne fanno parte anche i 12 vertici dei triangoli sizigetici dello stesso fascio. Infatti se la retta u passa per uno di quei vertici, la corrispondente curva $N = 0$ si scompone nel lato opposto e nelle tre rette armoniche passanti per quel vertice.

Per completare il discriminante D_N resterebbe a trovare un fattore,

combinante e della 6^a classe, e un esame dei combinanti di questa specie porterebbe a conchiudere ch'esso non può differire dalla forma

$$p_N = \frac{1}{12}\Phi$$

che per un fattore numerico. Questa forma posta uguale a zero dà una curva della 6^a classe che gode delle seguenti proprietà: essa non ha tangenti doppie nè stazionarie e le sue tangenti cuspidali passano sei a sei pei dodici vertici dei triangoli sizigetici del fascio $(\varkappa, \lambda)$.

Si ha infatti

$$\Phi = 12\left(\frac{R}{36}\right)^{\frac{4}{3}}[u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 - 10(u_2^3u_3^3 + u_3^3u_1^3 + u_1^3u_2^3)],$$

$$\Delta_\Phi = \frac{1}{2.3^6}R^4.u_1u_2u_3[(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3)^3 - 27u_1^3u_2^3u_3^3]$$

$$= \frac{1}{2.3^6}R^4u_1u_2u_3(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 - 3u_1u_2u_3).$$

$$.(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 - 3\varepsilon^2u_1u_2u_3).(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 - 3\varepsilon u_1u_2u_3);$$

epperò

$$\Delta_\Phi = 0$$

si scompone nei vertici dei trilateri sizigetici:

$$u_1u_2u_3 = 0,$$

$$u_1^3+u_2^3+u_3^3-3u_1u_2u_3=(u_1+u_2+u_3)(u_1+\varepsilon^2u_2+\varepsilon u_3)(u_1+\varepsilon u_2+\varepsilon^2u_3)=0,$$

$$u_1^3+u_2^3+u_3^3-3\varepsilon^2u_1u_2u_3=(u_1+\varepsilon^2u_2+u_3)(u_1+u_2+\varepsilon^2u_3)(u_1+\varepsilon u_2+\varepsilon u_3)=0,$$

$$u_1^3+u_2^3+u_3^3-3\varepsilon u_1u_2u_3=(u_1+\varepsilon u_2+u_3)(u_1+u_2+\varepsilon u_3)(u_1+\varepsilon^2u_2+\varepsilon^2u_3)=0.$$

L'equazione di questi vertici è, giusta una formula di Aronhold [*A*, (74)],

$$6\Gamma = \left(\frac{S^2}{36} + \frac{2}{3}T^2\right)\Sigma^4 - 2.S.T\Sigma^3\mathrm{T} + S^2\Sigma^2\mathrm{T}^2 + 4T\Sigma\mathrm{T}^3 - 3S\mathrm{T}^4 = 0;$$

la proprietà combinantiva del 1° membro viene resa evidente, osservando ch'esso differisce solamente per un fattore numerico dal discriminante della cubica binaria in $\varkappa$, λ: $\Sigma_{\varkappa\lambda}$; si ha infatti

$$\Gamma = \frac{1}{4} R_{\Sigma_{\varkappa\lambda}}. \qquad \text{(XLV)}$$

Due altri combinanti di questa specie si otterrebbero dagl'invarianti delle forme binarie risp. di 4° e 5° ordine $F_{\varkappa\lambda}$ e $T_{\varkappa\lambda}$ [C, (39) e (129)], ma è facile vedere che:

$$i_{F_{\varkappa\lambda}} = 0, \qquad \text{(XLVI)}$$

e che:

$$i_{T_{\varkappa\lambda}} = \frac{1}{12}(\varkappa \Pi + \lambda P)^2, \qquad \text{(XLVII) [Cfr. } C, \text{ (51)]}$$

da cui

$$A_{T_{\varkappa\lambda}} = 0. \qquad \text{(XLVIII)}$$

Messina, 23 marzo 1890.

G. MAISANO.

NOTE CONCERNING A FUNDAMENTAL THEOREM

OF ELLIPTIC FUNCTIONS,

AS TREATED IN HALPHEN'S TRAITÉ, VOL. I, PAGES 39-41;

By **E. H. Moore**, Evanston, Ill.

Adunanza del 23 marzo 1890.

1. The theorem in question is (*loc. cit.*, p. 40):

Il existe un argument u et un seul (à des multiples près des périodes) pour lequel $\wp u$ et $\wp' u$ soient respectivement égaux à des quantités imaginaires données, vérifiant la relation $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$.

As to the theory of elliptic functions relying only on the developments of the earlier pages of Halphen, I wish to give fuller expression to certain points of the proof of this theorem. For the sake of clearness it is well to have before us in outline the course along which Halphen leads us to the theorem to be considered. He defines geometrically the function $\mathrm{sn}(u, k)$ of a real argument u and with a real modulus k, and, after a preliminary study of its fundamental differential and addition-theorem properties, in terms of it he defines the Weierstrass $\wp(u; g_2, g_3)$ of a real argument u and with the real *invariants* g_2, g_3, which are any two real quantities satisfying the condition of inequality,

$$(1) \qquad g_2^3 - 27g_3^2 > 0.$$

He shows that this function satisfies the differential relation

$$(2) \qquad \wp'^2 u = \left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

and that for it the addition-theorem has the form (p. 30)

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\wp'(u_1+u_2)+\wp' u_1}{\wp(u_1+u_2)-\wp u_1} = \dfrac{\wp'(u_1+u_2)+\wp' u_2}{\wp(u_1+u_2)-\wp u_2} = -\dfrac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} = \xi \\ \wp(u_1+u_2) + \wp u_1 + \wp u_2 = \frac{1}{4}\xi^2 . \end{cases}$$

For a pure-imaginary argument iu (u real, $i = \sqrt{-1}$) the function is defined (p. 32) by the equation

$$\wp(iu;\, g_2,\, g_3) = -\wp(u;\, g_2,\, -g_3),$$

$$(g_2,\, g_3 \text{ real};\ g_2^3 - 27\, g_3^2 = g_2^3 - 27\,(-g_3)^2 > 0)$$

and it appears that for the function of the pure-imaginary argument as for the function of the real argument, the differential equation (2) and the addition-theorem (3) hold. The addition-theorem equation is used (p. 34) to define for a complex argument $u = a + i\alpha$ a function depending on the two variables a, α and in fact on them only as entering into the complex variable $u = a + i\alpha$; thus is defined a function $\wp u$ of the complex argument u, for which the differential equation (2) and the addition-theorem (3) hold and which is a doubly periodic (periods 2ω real, $2\omega'$ pure-imaginary) even function of its argument. It appears that two arguments u and v for which $\wp u = \wp v$ and $\wp' u = \wp' v$ are themselves equal to multiples of the periods *près*.

2. Then comes the theorem under consideration; *la fonction* $\wp u$ *passe par toutes les valeurs réelles ou imaginaires*; which is more definitely stated at the beginning of § 1. It is proved that for any two real quantities p_1, r_1 satisfying the relation (2)

$$(4) \qquad r_1^2 = 4p_1^3 - g_2 p_1 - g_3$$

there is an argument $u = a$ (itself real or the sum of a real quantity and the imaginary half-period ω') such that $\wp a = p_1$, $\wp' a = r_1$, and similarly that for two quantities p_2, ir_2, the first real, the second pure-imaginary, satisfying the relation (2)

$$(5) \qquad (ir_2)^2 = 4p_2^3 - g_2 p_2 - g_3$$

there is an argument b (itself pure-imaginary or the sum of a pure-imaginary quantity and the real half-period ω) such that $\wp b = p_2$, $\wp' b = ir_2$. It remains to prove (and to this part of the proof our attention will be confined) the theorem for the complex values of $\wp u$, $\wp' u$: *for any two complex quantities* $A + iB$, $A' + iB'$ (A, A', B, B' real) satisfying the relation (2)

$$(6) \qquad (A' + iB')^2 = 4(A + iB)^3 - g_2(A + iB) - g_3$$

there is an argument u *such that* $\wp u = A + iB$, $\wp' u = A' + iB'$. That all arguments whose function-and first-derivative-values are respectively equal differ at most by multiples of the periods has been proved earlier.

Using then the addition-theorem (which served to define the function $\wp u$ for the complex argument) and using also the parts of this theorem already proved, one seeks to determine the $p_1 = \wp a$, $r_1 = \wp' a$, $p_2 = \wp b$, $ir_2 = \wp' b$ (the first three real, the fourth pure-imaginary) of two arguments a, b such that the values $\wp(a + b)$, $\wp'(a + b)$ determined from them by the addition-theorem equations (3) shall respectively equal the given $A + iB$, $A' + iB'$; then the argument $u = a + b$ would fulfill the required conditions.

The addition-theorem equations (3) would require

$$(7) \qquad \frac{A' + iB' + r_1}{A + iB - p_1} = \frac{A' + iB' + ir_2}{A + iB - p_2} = \xi = x + iy$$

$$(8) \qquad (A + iB) + p_1 + p_2 = \tfrac{1}{4}\xi^2 = \tfrac{1}{4}(x + iy)^2.$$

In these three equations the A, B, A', B', are given real quantities

subject only to the condition (6) [and the g_2, g_3 entering (6) are given real quantities subject only to the inequality-condition (1), $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$] and we wish to determine the six unknowns x, y, p_1, r_1, p_2, r_2 as *real* quantities. Separating them in each equation the real and imaginary parts, considering the unknowns as real, we have six equations for the six unknowns, which equations do in fact lead to two (at least, and in fact four) sets of *real* values of the unknowns, as was wished. And so the theorem is proved, *if only* (*) out of such a set of values of the six unknowns each of the pairs (p_1, r_1), $(p_2, i r_2)$ satisfies the relation

$$(2) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3,$$

which by the first part of the theorem is the necessary and sufficient condition of their being admissible values of $(\wp u, \wp' u)$ for certain arguments $u = a$, $u = b$ respectively.

3. I shall now give Halphen's proof that there are at least two sets of *real* values of the six unknowns satisfying equations (7) (8), and then a direct study of the pairs (p_1, r_1), $(p_2, i r_2)$ of either set will show that the relation (2) is in fact satisfied for each pair.

The three equations (7, 8) give by separation of real and imaginary the six equations

$$(7_{11})\ A' + r_1 = Ax - By - xp_1, \quad (7_{12})\qquad B' = Ay + Bx - yp_1,$$

$$(7_{21})\qquad A' = Ax - By - xp_2, \quad (7_{22})\ B' + r_2 = Ay + Bx - yp_2,$$

$$(8_1)\ A + p_1 + p_2 = \tfrac{1}{4}(x^2 - y^2), \quad (8_2)\qquad 2B = xy.$$

(*) Halphen retains the unknowns in the equations (7) (8) in the form x, y, $\wp a$, $\wp' a$, $\wp b$, $\frac{1}{i}\wp' b$ and seems to assume that out of a set of six real values of the unknowns satisfying (7) (8) each of the pairs $(\wp a, \wp' a)$ $\left(\wp b, i\left(\frac{1}{i}\wp' b\right)\right)$ does (as suggested by the notation) satisfy the relation (2).

Eliminating y throughout by (8_2) and expressing p_1, p_2, r_1, r_2 in terms of x and the given A, B, A', B' by the equations ($7_{12}, 7_{21}, 7_{11}, 7_{22}$) we have the equations

$$(7'_{12})\ p_1 = \tfrac{1}{2}\left(x^2 - \frac{B'}{B}x + 2A\right), \qquad A - p_1 = -\tfrac{1}{2}\left(x^2 - \frac{B'}{B}x\right),$$

$$(7'_{21})\ p_2 = \frac{1}{x^2}(Ax^2 - A'x - 2B^2), \qquad A - p_2 = \frac{1}{x^2}(A'x + 2B^2),$$

$$(7'_{11})\ r_1 = \frac{1}{x}[(A-p_1)x^2 - A'x - 2B^2] = -\frac{1}{2x}\left(x^4 - \frac{B'}{B}x^3 + 2A'x + 4B^2\right),$$

$$(7'_{22})\ r_2 = \frac{B}{x}\left[x^2 - \frac{B'}{B}x + 2(A-p_2)\right] = \frac{B}{x^3}\left(x^4 - \frac{B'}{B}x^3 + 2A'x + 4B^2\right),$$

which give from (8_1, 8_2) the resolvant in x,

$$(8')\qquad x^4 - 2\frac{B'}{B}x^3 + 12Ax^2 - 4A'x - 4B^2 = 0.$$

This quartic resolvant has no root $x=0$ (for if B were 0, we should be dealing with the first and not the second part of the theorem) and, having first coefficient positive and last coefficient negative, it has at least two *real* roots x, and the relations (8_2, $7'_{12}$, ... $7'_{22}$) give corresponding real values of the unknowns y, p_1, p_2, r_1, r_2; that is, the three equations (7, 8) do have two sets of *real* values of the six unknowns (and this is true indeed for perfectly arbitrary real values A, B, A', B').

It remains to prove that each of the two pairs of quantities (p_1, r_1), (p_2, ir_2) determined by equations ($7'_{12}$ ... $7'_{22}$), in which the x is the same real root of the equation (8′) satisfies the relation

$$(2)\qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

where

$$(1)\qquad g_2,\ g_3 \text{ real};\quad g_2^3 - 27g_3^2 > 0,$$

when substituted for ($\wp$, $\wp'$); it is granted that the real quantities A, B, A', B' entering into the determination of (p_1, r_1), (p_2, ir_2) are such

that the relation (2) is satisfied also for $(A + iB,\ A' + iB')$

$$(6)\qquad (A' + iB')^2 = 4(A + iB)^3 - g_2(A + iB) - g_3,$$

and this is the sole point of contact between the (p_1, r_1), (p_2, ir_2) and the g_2, g_3 of the relation (2) which they are to be shown to satisfy.

We think of g_2, g_3 as initially given real and such that $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ and that then the four real quantities A, B, A', B' are constrained to satisfy the two relations $(6_1, 6_2)$ which arise from (6) by separation of real and imaginary. We may however think of A, B, A', B' as initially given real and limited only by the condition of inequality that the two real quantities g_2, g_3 fully determined from them by $(6_1, 6_2)$ satisfy the inequality, $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$. We may think then that the quartic in x (8′) has real coefficients limited only by this inequality-condition, which is in effect that its discriminant be positive, for g_2, g_3 turn out to be its fundamental invariants.

It is convenient to replace the quartic (8′) by

$$(8'')\qquad \begin{aligned} f(x) &\equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 \\ &\equiv a_0\left(x_4 - 2\frac{B'}{B}x^3 + 12Ax^2 - 4A'x - 4B^2\right) = 0, \end{aligned}$$

so that the A, ... B' are replaced by the a_0, ... a_4 in accordance with the equations

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\frac{B'}{B} = -2\frac{a_1}{a_0}, \quad A = \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0}, \quad A' = -\frac{a_3}{a_0}, \\ &B^2 = -\frac{1}{4}\frac{a_4}{a_0}, \quad B = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a_4}{a_0}}, \quad B' = \left(\frac{B'}{B}\right)B. \end{aligned}$$

Equation (6) after the insertion of a factor a_0^4 becomes

$$(6'')\qquad \begin{aligned} &(a_0 a_3 - a_1\sqrt{a_0 a_4})^2 = 4a_0(\tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_0 a_4})^3 \\ &\quad - (a_0^2 g_2)a_0(\tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{a_0 a_4}) - (a_0^3 g_3)a_0, \end{aligned}$$

from which by separation of the parts rational and irrational with respect to the $a_0 \ldots a_4$ [an operation equivalent to the separation of tha real and imaginary parts of (6)] are two equations linear in $a_0^2 g_2$, $a_0^3 g_3$ which lead to

$$(10) \qquad a_0^2 g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 \qquad \equiv J_2 \ (^*)$$

$$(11) \qquad a_0^3 g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 \equiv J_3$$

whence $a_0^2 g_2 = J_2$, $a_0^3 g_3 = J_3$ are indeed the fundamental invariants J_2, J_3 of the quartic $f(x)$. In terms of these the discriminant (**) R of the quartic is given by the equation, $R = J_2^3 - 27 J_3^2$, so that here, $R = a_0^6 (g_2^3 - 27 g_3^2) > 0$, the discriminant is positive, and hence, since the quartic has two real roots, all its roots are real. Thus is proved algebraically the reality of the four roots of the x-quartic, and so of the four sets of values of the six unknowns satisfying the equations (7, 8). This is in agreement with Halphen, who easily shows (p. 42) *a posteriori*, by considerations from the elliptic-function theory, that the quartic has four real roots.

In the equations (7′) replacing the $A, \ldots B'$ by the $a_0, \ldots a_4$ in accordance with (9), one has

$$(7''_{12}) \quad 2 a_0 p_1 = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2$$

$$(7''_{21}) \quad 2 a_0 p_2 = \frac{1}{x^2}(a_2 x^2 + 2 a_3 x + a_4) = a_4 \frac{1}{x^2} + 2 a_3 \frac{1}{x} + a_2,$$

$$(7''_{11}) \quad a_0 r_1 = -\frac{1}{2x}(a_0 x^4 + 2 a_1 x^3 - 2 a_3 x - a_4) = -(a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3$$

(*) I use the notation of the German edition of Faà di Bruno.

(**) For the quartic $f(x)$, the standard reducing cubic may be taken in the form

$$0 = 4 a_0^3 u - J_2 a_0 u + J_3 = a_0^3 (4 u^3 - g_2 u + g_3)$$

(Burnside and Panton, Theory of Equations, 1st edition, p. 116; by setting $2 a_0 u = \lambda$, one has $\lambda^3 - J_2 \lambda + 2 J^3 = 0$, the form of Faà di Bruno, p. 217). Thus the fundamental cubic $4 \zeta^3 - g_2 \zeta - g_3 = 0$ of the $\wp$-function is a linear transformation of the reducing cubic of the quartic $f(x) = 0$.

$$(7''_{22})\quad a_0 i r_2 = -\sqrt{\frac{a_4}{a_0}}\frac{1}{2x^3}(a_0 x^4 + 2a_1 x^3 - 2a_3 x - a_4)$$

$$= \sqrt{\frac{a_4}{a_0}}\left(a_4\frac{1}{x^3} + 3a_3\frac{1}{x^2} + 3a_2\frac{1}{x} + a_1\right),$$

where the final forms of $(7''_{11}, 7''_{22})$ are obtained by the permissible use of the relation $f(x) = 0$ $(8'')$ to eliminate the a_4, a_0 respectively.

Now the relation (2) may be written, by the insertion of a factor $2a_0^3$ and the use of (10, 11).

$$(2'')\qquad (2a_0 p)^3 - J_2(2a_0 p) - 2J_3 - 2a_0(a_0 p')^2 = 0.$$

This relation $(2'')$ is satisfied by $p = p_1$, $p' = r_1$ [determined by the equations $(7''_{12}, 7''_{11})$, where x is a root of the quartic $f(x) = 0$], for one has

$$(12)\qquad (2a_0 p_1)^3 - J_2(2a_0 p_1) - 2J_3 - 2a_0(a_0 r_1)^2$$

$$= (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^3 - J_2(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) - 2J_3$$

$$- 2a_0(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)^2$$

$$\equiv -f(x)[a_0(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) + 2(a_0 a_2 - a_1^2)];$$

this final identity may readily be verified; the cofactor of the $f(x)$ on the right is most easily obtained as the coefficient of the a_4 terms on the left, which enter from the J_2, J_3 (10, 11). From this identity (12), by writing throughout for $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ respectively (which does not change J_2 or J_3) and for x, $\frac{1}{x}$, one has the identity

$$(13)\qquad \left(a_4\frac{1}{x^2} + 2a_3\frac{1}{x} + a_2\right)^3 - J_2\left(a_4\frac{1}{x^2} + 2a_3\frac{1}{x} + a_2\right)$$

$$- 2J_3 - 2a_4\left(a_4\frac{1}{x^3} + 3a_3\frac{1}{x^2} + 3a_2\frac{1}{x} + a_1\right)^2$$

$$\equiv -\frac{1}{x^4} f(x)[a_4(a_4 \frac{1}{x^2} + 2a_3 \frac{1}{x} + a_2) + 2(a_4 a_2 - a_3^2)],$$

which expresses, after writing the last term of left in form

$$-2a_0 \left(\sqrt{\frac{a_4}{a_0}} (a_4 \frac{1}{x^3} + 3a_3 \frac{1}{x^2} + 3a_2 \frac{1}{x} + a_1) \right)^2$$

and remembering that $f(x) = 0$ has no root $x = 0$, the fact that the relation (2′′) is satisfied also by $p = p_2$, $p' = ir_2$, as determined by the equations ($7''_{21}$, $7''_{22}$), where x is a root of the quartic $f(x) = 0$

Northwestern University,
Evanston, Illinois,
Feb. 22, 1890.

E. H. Moore.

SOPRA UN TEOREMA DEL SIG. HUMBERT;

Osservazioni di **Guido Castelnuovo**, in Torino (*).

Adunanza dell'8 giugno 1890.

Solo da pochi giorni, ricevendo il fascicolo dei *Rendiconti* che la contiene (tomo IV, pag. 72), potei vedere la replica fatta dal sig. Humbert nella seduta del 23 febbrajo scorso, alla mia Comunicazione in data 13 febbrajo.

Però quella replica mi conferma nelle idee che già espressi, poichè la dimostrazione data dal sig. Humbert non regge. In essa il difetto, come si sarà accorto chiunque abbia presente una ben nota Memoria del sig. Nöther (*Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Annalen, Bd. III, cfr. pag. 162 e seguenti), consiste nell'ammettere che le varie cubiche della superficie possano rappresentarsi in un *determinato* modo mediante le equazioni (1). Il Nöther nel caso analogo, in cui si tratta di una superficie con una serie ∞^1 di curve razionali C, per poter stabilire una corrispondenza univoca fra i punti della superficie e le terne di valori dei parametri ρ, λ, μ, gli ultimi due essendo legati da un'equazione $f(\lambda, \mu)=0$ (dei quali parametri il primo ρ fissa *un punto* sopra una curva C, mentre la coppia λ, μ sodisfacente alla $f=0$ fissa *una delle ∞^1 curve C*), ha cura di dimostrare con tutto il rigore, che esiste almeno una curva C' secante *in un sol punto* ciascuna curva C, ed esiste quindi una *ben determinata* rappresentazione parametrica su ognuna delle ∞^1 curve C: e lascia sospeso il caso in cui non si vede l'esistenza di una tal curva C'.

Per la nostra superficie con ∞^1 cubiche piane C, la rappresentazione del sig. Humbert mediante le (1) fa corrispondere ad ogni punto della superficie un solo valore di u (a meno di multipli dei periodi), *soltanto quando si possa fissare sopra ogni cu-*

(*) Queste osservazioni erano scritte per i *Verbali*; al solo scopo di affrettarne la pubblicazione vennero inserite nel corpo dei *Rendiconti*.

bica C una ben determinata ed unica rappresentazione parametrica, per il che è *necessario* che esista una curva C', la quale venga descritta da *un solo flesso*. Se il sig. Humbert ammette l'esistenza di questa C', egli ammette che già in parte si verifichi quel teorema che egli si propone di dimostrare. Se invece il sig. Humbert non fa questa ipotesi, *non già una* ma forse un certo numero $k > 1$ di rappresentazioni parametriche (formanti un gruppo *irriduttibile*) si potranno fissare su ciascuna curva C, staccandole dalle rimanenti rappresentazioni della C; in tal caso si hanno per ogni punto della superficie k valori di u (incongrui rispetto ai periodi), ed una stessa curva C' è descritta *non già da uno ma da k* punti di C, e precisamente in modo che ciascun punto di C' è posizione di uno solo tra i k punti (dal che risulta chiaro non doversi chiamare la C' riunione di k curve).

E si badi bene che l'esistenza di una curva descritta da un solo flesso è condizione *necessaria*, ma non ancora *sufficiente*, perchè regga la dimostrazione del sig. Humbert. Per spiegarlo nel modo più chiaro mi servo dell'ultimo dei due esempi che ho addotto nella Comunicazione del 13 febbrajo, e che il sig. Humbert non credette di discutere. L'esempio riguardava la superficie cubica di rivoluzione, la quale, scegliendo l'asse di rotazione come asse delle x, e il flesso che descrive una retta all'infinito come punto $u = 0$, può rappresentarsi mediante le equazioni:

$$x = \wp(u), \qquad y = a\wp'(u), \qquad z = b\wp'(u),$$

dove a e b determinano la cubica meridiana, e sono legati dalla relazione $a^2 + b^2 = 1$; quelle equazioni sostituiscono nel nostro caso le (1) del sig. Humbert. Ora si vede che le coppie di parametri a, b sono in corrispondenza univoca, non colla serie delle cubiche, ma colla serie delle loro rappresentazioni parametriche considerate, sicchè una stessa cubica corrisponde tanto alla coppia (a, b), quanto alla $(-a, -b)$, mentre il punto che nella rappresentazione colla coppia (a, b) corrisponde ad un certo valore di u, nella rappresentazione con $(-a, -b)$ corrisponde al valore opposto $-u$. Dal che segue che uno stesso cerchio C' è descritto dai punti u e $-u$ della cubica (a, b) (in particolare da due flessi); e precisamente in guisa che ciascun punto di C viene incontrato *una sola volta*, quando la cubica meridiana ruotando di un diedro piatto descrive tutta la superficie.

Torino, 23 maggio 1890.

GUIDO CASTELNUOVO.

SULLE EQUAZIONI ALGEBRICO-DIFFERENZIALI

DEL PRIMO ORDINE;

Nota II di **Giulio Vivanti**, in Mantova.

Adunanza del 13 aprile 1890.

1. La presente Nota è la continuazione di un'altra pubblicata sotto lo stesso titolo in questo volume dei Rendiconti (*). Il problema che in esso mi propongo è il seguente: Quali sono le condizioni necessaie e sufficienti perchè un integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del 1° ordine possa esprimersi algebricamente mediante gl'integrali di due equazioni algebrico-differenziali lineari simultanee del 1°

(*) Pag. 9-24. Mi permetto di correggere qui alcuni errori che mi sono sfuggiti nella revisione delle bozze di stampa di quella Nota:

Pag. 15	Invece di:	e^x, $e^{v-\varphi(w,z)}$	leggasi:	e^{cx}, $e^{c(v-\varphi(w,z))}$
» 17 l. 10	»	$\frac{dv}{dz}$	»	$\frac{dv_1}{dz}$
» 18 » 12	»	$\Phi\left[x\Psi\left(\frac{x^c}{y}\right)\right]$	»	$\Phi\left[y\Psi\left(\frac{x^c}{y}\right)\right]$
» 22 » 14	Dopo:	costante	aggiungasi:	$(=0)$
» 23 » 13	Cancellisi la parola:	lineare		
» » » 16-17	Invece di:	indipendente	leggasi:	dipendente
» » » ultima	»	$K(z)v_1$	»	$\Theta(z)v_1$
» 24	Trasportisi la nota a piè di pagina a pag. 23.			

rdine? L'analisi che conduce alla risoluzione di questo problema arrà forse alquanto lunga relativamente alla limitata importanza di sso; ma tuttavia m'induco a pubblicarla, perchè essa offre l'esempio i vari artifizi che possono riuscire utili nella trattazione di questioni naloghe.

2. Sia $\frac{dw}{dz}=f(w, z)$ un'equazione algebrico-differenziale del 1° ordine, e sieno $\frac{dx}{dz}=H_1(x, y, z)$, $\frac{dy}{dz}=H_2(x, y, z)$ due equazioni lgebrico-differenziali simultanee del 1° ordine. Suppongasi esistere fra gli integrali trascendenti w, x, y di queste tre equazioni una relazione algebrica $w=F(x\ y)$. Indicando con p, q, r, s, t le derivate parziali di $F(x, y)$ rispetto ad x e ad y, si avrà:

$$\frac{dw}{dz}=p\frac{dx}{dz}+q\frac{dy}{dz},$$

quindi dovrà essere identicamente rispetto ad x, y, z:

$$f[F(x, y), z]=H_1 p+H_2 q.$$

Per applicare a questa equazione, in cui per ora z si riguarda come un parametro, il metodo d'E u l e r o, si devono considerare le equazioni ausiliarie:

$$\frac{dx}{H_1}=\frac{dy}{H_2}=\frac{dF}{f(F)}.$$

Se le funzioni H_1, H_2 sono tali, che si possano determinare due funzioni $X(x, y)$, $Y(x, y)$ di x, y per cui sia:

$$\frac{dx}{H_1}=\frac{dy}{H_2}=\frac{dX}{K_1(X)}=\frac{dY}{K_2(Y)},$$

e se si pone:

$$\int\frac{dX}{K_1(X)}=\log L_1(X),\ \int\frac{dY}{K_2(Y)}=\log L_2(Y),\ \int\frac{dF}{f(F)}=\log\chi(F),$$

si avrà per l' integrale cercato, indicando con Θ una funzione arbitraria:

$$\log\chi(F) - \log L_2(Y) = \Theta[\log L_1(X) - \log L_2(Y)],$$

e infine, denotando con Φ la funzione inversa di χ e ponendo

$$\Theta(\log u) = \log \Psi(u),$$

$$w = F = \Phi\left[L_2(Y)\Psi\left(\frac{L_1(X)}{L_2(Y)}\right)\right].$$

Le funzioni X, Y, L_1, L_2, Φ, Ψ contengono tutte come parametro la z; e resta da determinarsi, quando ciò sia possibile, la funzione arbitraria Ψ in modo che il secondo membro dell'ultima equazione contenga (algebricamente) x ed y, ma sia indipendente da z.

3. Applichiamo queste considerazioni generali al problema enunciato in principio. Abbiamo qui:

$$H_1(x, y, z) = a_1 x + b_1 y + c_1, \qquad H_2(x, y, z) = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

essendo a_i, b_i, c_i funzioni algebriche di z. Se h_1, h_2 sono le radici dell'equazione:

$$a_2 h^2 + (a_1 - b_2)h - b_1 = 0,$$

dovremo trattare separatamente il caso di $h_1 \neq h_2$ e quello di $h_1 = h_2$.

4. *A*) $h_1 \neq h_2$. — a) Caso generale. — Ponendo:

$$X = x + h_1 y + \frac{c_1 + h_1 c_2}{a_1 + h_1 a_2}, \quad Y = x + h_2 y + \frac{c_1 + h_2 c_2}{a_1 + h_2 a_2},$$

si ha:

$$K_1(X) = (a_1 + h_1 a_2)X, \quad K_2(Y) = (a_1 + h_2 a_2)Y,$$

quindi:

$$L_1(X) = X^{\frac{1}{a_1 + h_1 a_2}}, \quad L_2(Y) = Y^{\frac{1}{a_1 + h_2 a_2}}, \quad w = \Phi\left\{Y^{\frac{1}{a_1 + h_2 a_2}}\Psi\left(\frac{X^{\frac{1}{a_1 + h_1 a_2}}}{Y^{\frac{1}{a_1 + h_2 a_2}}}\right)\right\},$$

ossia, modificando alquanto il significato dei simboli Φ, Ψ, ponendo $\frac{a_1 + b_2 a_2}{a_1 + b_1 a_2} = m$, e mettendo in evidenza il parametro z:

$$w = F(x, y) = \Phi\left[Y\Psi\left(\frac{X^m}{Y}, z\right), z\right].$$

Le X, Y, considerate quali funzioni di z, soddisfanno a due equazioni lineari simultanee facilmente costruibili, che scriverò così:

$$\frac{dX}{dz} = A_1 X + B_1 Y + C_1, \quad \frac{dY}{dz} = A_2 X + B_2 Y + C_2 \text{ (*)}.$$

Poniamo $\frac{X^m}{Y} = \xi$, $Y\Psi(\xi, z) = \theta$, avremo identicamente:

$$f(\Phi, z) = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dz},$$

e poichè in $f(\Phi, z)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$, ξ ed Y figurano soltanto nella combinazione θ, lo stesso dovrà aver luogo per $\frac{d\theta}{dz}$. Ora:

$$\frac{d\xi}{dz} = \xi\left(\frac{m}{X}\frac{dX}{dz} - \frac{1}{Y}\frac{dY}{dz} + m' \log X\right)$$

$$= \xi\left[m\left(A_1 + B_1\frac{Y}{X} + \frac{C_1}{X}\right) - A_2\frac{X}{Y} - B_2 - \frac{C_2}{Y} + m' \log X\right]$$

$$= \left(mA_1 - B_2 + \frac{m'}{m}\log\xi\right)\xi + \frac{m'}{m}\xi\log Y$$

$$+ mB_1\xi^{\frac{m-1}{m}}Y^{\frac{m-1}{m}} + mC_1\xi^{\frac{m-1}{m}}Y^{-\frac{1}{m}} - A_2\xi^{\frac{m+1}{m}}Y^{\frac{1-m}{m}} - C_2\xi Y^{-1},$$

(*) Posto $\frac{c_1 + b_i c_2}{a_1 + b_i a_2} = k_i$, si trova:

$$A_1 = a_1 + b_1 a_2 + \frac{b'_1}{b_1 - b_2}, \quad B_1 = -\frac{b'_1}{b_1 - b_2}, \quad C_1 = b'_1\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + k'_1$$

$$A_2 = -\frac{b'_2}{b_2 - b_1}, \quad B_2 = a_1 + b_2 a_2 + \frac{b'_2}{b_2 - b_1}, \quad C_2 = b'_2\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + k'_2.$$

quindi:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = Y\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\zeta}\right) + \Psi\frac{dY}{d\zeta}$$

$$= Y\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \left(mA_1 - B_2 + \frac{m'}{m}\log\xi\right)\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + B_2\Psi\right]$$

$$+ \frac{m'}{m}\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} Y\log Y + mB_1\xi^{\frac{m-1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}Y^{\frac{2m-1}{m}} + mC_1\xi^{\frac{m-1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}Y^{\frac{m-1}{m}}$$

$$+ A_2\left(-\xi^{\frac{m+1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \xi^{\frac{1}{m}}\Psi\right)Y^{\frac{1}{m}} + C_2\left(-\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \Psi\right);$$

e si vede che questa espressione dovrà avere la forma:

$$(M_1 + M_2\log\theta)\theta + M_3\theta^{\frac{2m-1}{m}} + M_4\theta^{\frac{m-1}{m}} + M_5\theta^{\frac{1}{m}} + M_6,$$

ossia:

$$(M_1 + M_2\log\Psi)\Psi Y + M_2\Psi Y\log Y + M_3\Psi^{\frac{2m-1}{m}}Y^{\frac{2m-1}{m}}$$

$$+ M_4\Psi^{\frac{m-1}{m}}Y^{\frac{m-1}{m}} + M_5\Psi^{\frac{1}{m}}Y^{\frac{1}{m}} + M_6,$$

dove le M sono funzioni della sola ζ. Eguagliando i coefficienti di

$$Y, \qquad Y\log Y, \qquad Y^{\frac{2m-1}{m}}, \qquad Y^{\frac{m-1}{m}}, \qquad Y^{\frac{1}{m}}, \qquad Y^0,$$

si ottiene:

$$M_1\Psi + M_2\Psi\log\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \left(mA_1 - B_2 + \frac{m'}{m}\log\xi\right)\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + B_2\Psi \quad (1)$$

$$M_2\Psi = \frac{m'}{m}\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (2)$$

$$M_3\Psi^{\frac{2m-1}{m}} = mB_1\xi^{\frac{m-1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (3)$$

$$M_4\Psi^{\frac{m-1}{m}} = mC_1\xi^{\frac{m-1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (4)$$

$$M_5\Psi^{\frac{1}{m}} = A_2\left(-\xi^{\frac{m+1}{m}}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \xi^{\frac{1}{m}}\Psi\right) \quad (5)$$

$$M_6 = C_2\left(-\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \Psi\right). \quad (6)$$

Le equazioni (2-6) integrate dànno rispettivamente:

$$\Psi = K_2 \xi^{\frac{M_2 m}{m'}} \tag{7}$$

$$\Psi = \left[\frac{1-m}{m}\frac{M_3}{B_1}\xi^{\frac{1}{m}} + K_3\right]^{\frac{m}{1-m}} \tag{8}$$

$$\Psi = \left[\frac{M_4}{m C_1}\xi^{\frac{1}{m}} + K_4\right]^{m} \tag{9}$$

$$\Psi = \xi^{\frac{1}{1-m}}\left[K_5 \xi + \frac{m-1}{m}\frac{M_5}{A_2}\right]^{\frac{m}{m-1}} \tag{10}$$

$$\Psi = K_6 \xi + \frac{M_6}{C_2}, \tag{11}$$

dove le K_i sono funzioni arbitrarie di ζ, alla cui determinazione servirebbe la (1). Le equazioni (7-11) cessano di sussistere quando si ha rispettivamente $m = \text{cost.}$, $B_1 \equiv 0$, $C_1 \equiv 0$, $A_2 \equiv 0$, $C_2 \equiv 0$.

Affinchè due qualunque delle equazioni (9), (10), (11) possano sussistere insieme, esse devono ridursi alla forma:

$$\Psi = R\xi, \tag{12}$$

dove R è una funzione di ζ. Affinchè le (8), (10) possano sussistere insieme, esse devono ridursi alla forma:

$$\Psi = R\xi^{\frac{1}{1-m}}, \tag{13}$$

dove R ha lo stesso significato di prima. Infine la (8) non è conciliabile colla (9) nè colla (11) se Ψ non si riduce ad una funzione della sola ζ.

5. Se m è variabile, la (7) ci dà senz'altro la forma di Ψ. Si ha quindi:

$$w = \Phi\left(\frac{X^{\frac{M_2 m^2}{m'}}}{Y^{\frac{M_2 m}{m'}-1}}, \zeta\right),$$

ossia, ponendo $\dfrac{M_2 m^2}{M_2 m - m'} = n$, e modificando alquanto il significato di Φ:

$$w = \Phi\left(\frac{X^n}{Y}, z\right). \tag{14}$$

6. Sia ora m costante, e supponiamo dapprima, B_1, C_1, A_2, e C_2 identicamente nulle. Allora (v. n. 4, nota) b_1, b_2, k_1, k_2 sono costanti, e si ha:

$$\frac{dX}{dz} = (a_1 + b_1 a_2) X, \quad \frac{dY}{dz} = (a_1 + b_2 a_2) Y = m(a_1 + b_1 a_2) Y$$

quindi $\dfrac{\frac{dY}{dz}}{Y} = m \dfrac{\frac{dz}{dz}}{X}$. Integrando si ottiene $\dfrac{X^m}{Y} =$ cost., quindi:

$$w = \Phi(Y, z). \tag{15}$$

In secondo luogo supporremo identicamente nulle 3 delle funzioni B_1, C_1, A_2, C_2. Sia $B_1 \equiv C_1 \equiv A_2 \equiv 0$; allora la (11) ci dà:

$$0 = K_6 X^m + \frac{M_6}{C_2} Y,$$

quindi denotando con R una funzione di z:

$$w = \Phi(X^m + RY, z). \tag{16}$$

Sia invece $B_1 \equiv C_1 \equiv C_2 \equiv 0$; si ha in virtù della (10), denotando ancora con R una funzione di z:

$$w = \Phi\left(X^{m-1} + R\frac{Y}{X}, z\right). \tag{17}$$

I casi $A_2 \equiv C_2 \equiv B_1 \equiv 0$, $A_2 \equiv C_2 \equiv C_1 \equiv 0$ si deducono dai precedenti scambiando sin da principio x con y.

Infine supporremo che due *almeno* delle B_1, C_1, A_2, C_2 non sieno identicamente nulle. Da ciò che si è detto sopra (n. 4) risulta, che, se questo ha luogo per C_1, A_2 o per C_1, C_2 o per A_2, C_2,

Ψ ha la forma (12), se per B_1, A_2, Ψ ha la forma (13), se per B_1, C_1, o per B_1, C_2, Ψ è funzione della sola z. Corrispondentemente si ha:

$$w = \Phi(X, z),\ w = \Phi\left(\frac{X}{Y}, z\right),\ w = \Phi(Y, z). \tag{18}$$

7. b) Caso di $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$. — In questo caso il processo esposto non conduce ad alcun risultato perchè, posto $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = l$ (*), si trova $h_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $h_2 = -\frac{1}{l}$, quindi $a_1 + h_2 a_2 = 0$. Però è facile ridurre il sistema ausiliario alla forma seguente:

$$\frac{a_1 dx + b_1 dy}{(a_1 + lb_1)\left(a_1 x + b_1 y + \dfrac{a_1 c_1 + b_1 c_2}{a_1 + lb_1}\right)} = \frac{l dx - dy}{lc_1 - c_2} = \frac{dF}{f(F)},$$

dopo di che si ottiene:

$$w = F(x, y) = \Phi[Y + \Psi(X^\lambda e^{-Y}, z), z],$$

ponendo:

$$\lambda = \frac{lc_1 - c_2}{a_1 + lb_1},\ X = a_1 x + b_1 y + \frac{a_1 c_1 + b_1 c_2}{a_1 + lb_1},\ Y = lx - y.$$

Mediante queste due ultime relazioni la $F(x, y)$ può porsi sotto forma d'una funzione algebrica $G(X, Y, z)$ di X, Y, z; sicchè si ha identicamente:

$$G(X, Y, z) = \Phi[Y + \Psi(X^\lambda e^{-Y}, z), z].$$

(*) La funzione l di z non può ridursi ad una costante. Infatti essendo $l\frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz} = lc_1 - c_2$, se l fosse costante si avrebbe integrando:

$$lx - y = \int (lc_1 - c_2)\, dz = I,$$

dove I è un integrale abeliano, e quindi, designando con G una funzione algebrica:

$$w = F(x, y) = F(x, lx - I) = G(x, I);$$

ma ciò è impossibile (v. n. 3 della 1ª parte di questo lavoro).

Derivando rispetto ad X e ad Y si ha:

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \Phi' \Psi' \lambda X^{\lambda-1} e^{-Y}, \qquad \frac{\partial G}{\partial Y} = \Phi' - \Phi' \Psi' X^{\lambda} e^{-Y}$$

(dove Φ', Ψ' denotano le derivate di Φ, Ψ rispetto al primo argomento), quindi:

$$\Phi' \Psi' X^{\lambda} e^{-Y} = \frac{X}{\lambda} \frac{\partial G}{\partial X}, \qquad \Phi' = \frac{\partial G}{\partial Y} + \frac{X}{\lambda} \frac{\partial G}{\partial X},$$

e dividendo:

$$\Psi' X^{\lambda} e^{-Y} = \frac{\frac{X}{\lambda} \frac{\partial G}{\partial X}}{\frac{\partial G}{\partial Y} + \frac{X}{\lambda} \frac{\partial G}{\partial X}}.$$

Ora il 2° membro è una funzione algebrica di X e di Y, mentre il 1° membro, essendo una funzione di $X^{\lambda} e^{-Y}$, non può essere nello stesso tempo funzione algebrica di X e di Y. Dunque la relazione trovata non può sussistere, se i due membri non sono indipendenti da X e da Y. In tal caso, denotando con P, Q due funzioni di z, si ha $\Psi' X^{\lambda} e^{-Y} = P$, quindi:

$$\Psi = P \log(X^{\lambda} e^{-Y}) + Q = -PY + P\lambda \log X + Q,$$

$$w = \Phi[Y(1 - P) + P\lambda \log X + Q].$$

Ma il 2° membro non può essere funzione algebrica di X e di Y se non è o $P = 1$ o $P = 0$; nei quali casi può scriversi rispettivamente:

$$w = \Phi(X), \quad w = \Phi(Y). \tag{19}$$

8. c) CASO DI $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$. In questo caso, essendo $lc_1 - c_2 = 0$, non può applicarsi il metodo precedente. Si trova invece:

$$w = \Phi[X \Psi(Y, z), z],$$

dove:

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad Y = lx - y.$$

Ripetendo un ragionamento già fatto (n° 4), si stabilisce che nella espressione di $\frac{d[X\Psi(Y, z)]}{dz}$ X e Y devono figurare soltanto nella combinazione $X\Psi(Y, z)$. Se si attribuisce ad A_i, B_i, C_i lo stesso significato che nel n° 4, si ha:

$$\frac{d(X\Psi)}{dz} = (A_1X + B_1Y + C_1)\Psi + X\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z} + (A_2X + B_2Y + C_2)\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right]$$

$$= A_2\frac{\partial\Psi}{\partial Y}X^2 + \left[A_1\Psi + (B_2Y + C_2)\frac{\partial\Psi}{\partial Y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right]X + (B_1Y + C_1)\Psi.$$

Dovrà essere adunque, denotando M_0, M_1, M_2 3 funzioni di z:

$$A_2\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = M_0\Psi^2, \quad A_1\Psi + (B_2Y + C_2)\frac{\partial\Psi}{\partial Y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} = M_1\Psi, \quad (B_1Y + C_1)\Psi = M_2.$$

Dalla prima si ha integrando $\Psi = -\frac{A_2}{M_0(Y + K)}$, dove K è una funzione arbitraria di z; e dalla terza $\Psi = \frac{M_2}{B_1Y + C_1}$. La prima delle due espressioni di Ψ non diviene mai illusoria, perchè A_2 non è mai identicamente nullo (*); paragonandola coll'altra si ottiene $K = \frac{C_1}{B_1}$, sicchè K è funzione algebrica di z. Può scriversi quindi Y invece di $Y + K$, dopo di che si ha:

$$w = \Phi\left(\frac{X}{Y}, z\right). \tag{20}$$

9. B) $h_1 = h_2$. — d) Caso generale. — Indicando con h il valore

(*) Si trova infatti $A_2 = \frac{1}{a_1 + lb_1} l'$, ed l non è mai costante (n° 7).

comune di h_1, h_2, e ponendo $X = x + hy + \frac{c_1 + hc_2}{a_1 + ha_2}$, si trova col metodo del n. 4 uno degli integrali del sistema ausiliario sotto la forma $F = \Phi(X.\ \text{cost.})$. Per avere un altro integrale, si pone:

$$x + \alpha = \xi, \qquad y + \beta = \eta,$$

essendo α, β determinate dalle equazioni:

$$a_1\alpha + b_1\beta = c_1, \qquad a_2\alpha + b_2\beta = c_2;$$

l'equazione $\frac{dx}{H_1} = \frac{dy}{H_2}$ si trasforma così in un'equazione omogenea, che integrata coi metodi ordinari ci dà, scrivendo per uniformità Y invece di η e facendo $-\frac{a_1 + b_2}{2a_2} = n$:

$$Xe^{\frac{nY}{X}} = \text{cost.}$$

Dunque l'integrale dell'equazione a derivate parziali del 1° ordine è:

$$w = \Phi\left[X\,\Psi\left(Xe^{\frac{nY}{X}},\ z\right),\ z\right].$$

Per la stessa via seguita nel n° 7 si giunge a stabilire che $Xe^{\frac{nY}{X}}\frac{\Psi'}{\Psi}$ deve essere algebrica rispetto ad X e ad $e^{\frac{nY}{X}}$, quindi che deve ridursi ad una funzione della sola z; integrando poi e denotando con P, Q due funzioni di z, si ottiene:

$$\Psi\left(Xe^{\frac{nY}{X}},\ z\right) = P\left(Xe^{\frac{nY}{X}}\right)^Q,$$

quindi:

$$w = \Phi\left[PX^{Q+1}e^{\frac{nYQ}{X}},\ z\right],$$

che non può essere algebrica rispetto ad X e ad Y se non è $Q=0$ o $Q=-1$. Corrispondentemente si ha:

$$w=\Phi(X, z), \qquad w=\Phi\left(\frac{X}{Y}, z\right). \tag{21}$$

10. e) Caso di $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=l$. In questo caso si trova facilmente l'integrale:

$$w=\Phi[Y+\Psi(Y^2-X, z), z],$$

dove:

$$X=\frac{2a_1}{l(lc_1-c_2)}x, \quad Y=\frac{1}{lc_1-c_2}(a_1x+b_1y+c_1).$$

Dalle relazioni $b_1=b_2$, $a_2b_1=a_1b_2$ segue $b_2=-a_1$, ossia

$l=-\frac{a_1}{b_1}$, da cui $l'=\frac{a_1b'_1-b_1a'_1}{b_1^2}$. Calcolando A_2, si trova:

$$A_2=\frac{b_1a'_1-a_1b'_1}{2a_1b_1}l=-\frac{1}{2}l',$$

donde risulta (v. n° 7, nota) che A_2 non può essere identicamente nullo. Dopo ciò, posto:

$$Y^2-X=\xi, \quad Y+\Psi(\xi, z)=\theta,$$

si ha:

$$\frac{d\xi}{dz}=2Y(A_2X+B_2Y+C_2)-(A_1X+B_1Y+C_1)$$

$$=2Y[A_2(Y^2-\xi)+B_2Y+C_2]-[A_1(Y^2-\xi)+B_1Y+C_1]$$

$$\frac{d\theta}{dz}=A_2X+B_2Y+C_2+\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dz}=A_2(Y^2-\xi)+B_2Y+C_2$$

$$+\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\{2Y[A_2(Y^2-\xi)+B_2Y+C_2]-[A_1(Y^2-\xi)+B_1Y+C_1]\}.$$

Questa espressione, dovendo contenere Y, ξ soltanto nella combinazione θ, avrà necessariamente la forma:

$$M_0(Y+\Psi)^3+M_1(Y+\Psi)^2+M_2(Y+\Psi)+M_3,$$

dove le M_i sono funzioni di z. Paragonando i coefficienti di Y^3 e di Y^2 si ha:

$$2A_2\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}=M_0,\quad A_2+(2B_2-A_1)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}=3M_0\Psi+M_1.$$

La prima di queste relazioni ci dà $\Psi=\frac{M_0}{2A_2}\xi+K$, essendo K una funzione arbitraria di z; introducendo questo valore nella seconda relazione, si vede che dev' essere necessariamente $M_0=0$, giacchè l'unico termine contenente ξ è $\frac{3M_0^2\xi}{2A_2}$. Dunque Ψ si riduce ad una funzione della sola z, e si ha:

$$w=\Phi(Y,z). \tag{22}$$

11. f) Caso di $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=l$. In questo caso si ottiene l'integrale:

$$w=\Phi\left[\frac{X}{Y}+\Psi(Y,z),\ z\right],$$

dove $X=x$, $Y=a_1x+b_1y+c_1$. Si trova:

$$A_2=\frac{a_1'b_1-b_1'a_1}{b_1}=-b_1l',$$

sicchè (v. n° 7, nota) A_2 non è mai identicamente nullo. Dopo ciò, posto $\frac{X}{Y}=\xi$, $\frac{X}{Y}+\Psi=\theta$, si ha:

$$\frac{d\xi}{dz}=\frac{\frac{dX}{dz}}{Y}-\frac{X\frac{dY}{dz}}{Y^2}=1-\frac{\xi(A_2\xi Y+B_2Y+C_2)}{Y},$$

$$\frac{d\theta}{dz}=1-\frac{\xi(A_2\xi Y+B_2Y+C_2)}{Y}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}(A_2\xi Y+B_2Y+C_2)+\frac{\partial\Psi}{\partial z};$$

e poichè in questa espressione ξ ed Y devono figurare solo nella combinazione $\xi+\Psi(Y,z)$, essa avrà la forma:

$$M_0(\xi+\Psi)^2+M_1(\xi+\Psi)+M_2,$$

dove le M_i sono funzioni di z. Paragonando i coefficienti di ξ^2, ξ e i termini indipendenti da z, si ottiene:

$$-A_2 = M_0, \qquad -B_2 - \frac{C_2}{Y} + A_2 Y \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 2 M_0 \Psi + M_1,$$

$$1 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (B_2 Y + C_2)\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = M_0 \Psi^2 + M_1 \Psi + M_2.$$

Se si integra la seconda di queste equazioni tenendo conto della prima, si ha:

$$\Psi = \frac{\alpha}{Y^2} + \frac{\beta}{Y} + \gamma,$$

dove α è una funzione arbitraria di z, $\beta = \frac{C_2}{A_2}$, $\gamma = \frac{M_1 + B_2}{2 A_2}$. Introducendo il valore trovato nella terza relazione, si vede che il solo termine di grado -4 in Y è $\frac{\alpha}{Y^4}$, sicchè dev'essere $\alpha = 0$. Ne segue:

$$\Psi = \frac{\beta}{Y} + \gamma, \qquad w = \Phi\left[\frac{X + \gamma Y + \beta}{Y}, z\right],$$

ossia, scrivendo X invece di $X + \beta$, ciò che è lecito perchè β è funzione algebrica di z, e modificando il significato di Φ:

$$w = \Phi\left(\frac{X}{Y}, z\right). \tag{23}$$

12. Abbiamo così trovato come le sole forme possibili di w (vedi eq. 14-23) le 4 seguenti:

$$\Phi(X, z), \ \Phi\left(\frac{X^n}{Y}, z\right), \ \Phi(X^m + R\,Y, z), \ \Phi\left(\frac{X^m + R\,Y}{X}, z\right),$$

dove X, Y sono funzioni lineari intere di x, y:

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1, \qquad Y = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

i cui coefficienti dipendono algebricamente da z; R, n sono funzioni di z, ed m è una costante.

Esaminiamo dapprima la forma $\Phi\,(X, z)$. Siccome essa deve ridursi ad una funzione di x, y non contenente z, così dovrà essere identicamente:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial X}(a'_1 x+b'_1 y+c'_1)=0;$$

e poichè $\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{\partial\Phi}{\partial X}$ non contengono x, y se non nella combinazione X, lo stesso dovrà aver luogo pel coefficiente di $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$. È facile vedere dopo ciò che dovrà essere identicamente:

$$a'_1 x+b'_1 y+c'_1=M(a_1 x+b_1 y+c_1)+N,$$

essendo M, N funzioni di z. Di qui si ha $\frac{a'_1}{a_1}=\frac{b'_1}{b_1}$, quindi $b_1=\beta a_1$, β denotando una costante, e infine $X=a_1(x+\beta y)+c_1$; sicchè si potrà scrivere:

$$w=\Phi(x+\beta y),$$

e w sarà funzione algebrica dell'integrale di *una* equazione lineare. Indicando con ξ tale integrale, si vede subito che mediante la trasformazione $w=\Phi(\xi)$, dove Φ è simbolo di funzione algebrica, l'equazione data si trasforma in un'equazione lineare; e l'esistenza d'una siffatta trasformazione è la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione proposta abbia un integrale della forma $w=\Phi(\xi)$.

13. Veniamo alla forma $\Phi\left(\frac{X^n}{Y}, z\right)$. Ponendo:

$$a'_i x+b'_i y+c'_i=\alpha_i X+\beta_i Y+\gamma_i,$$

donde segue:

$$\alpha_i=\frac{a'_i b_2-b'_i a_2}{a_1 b_2-b_1 a_2},\ \beta_i=\frac{b'_i a_1-a'_i b_1}{a_1 b_2-b_1 a_2},\ \gamma_i=\frac{1}{a_1 b_2-b_1 a_2}\begin{vmatrix} a'_i & a_1 & a_2\\ b'_i & b_1 & b_2\\ c'_i & c_1 & c_2\end{vmatrix},$$

e ripetendo il ragionamento del n. 12, si trova che:

$$n'\log X+n\frac{\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1}{X}-\frac{\alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_2}{Y}$$

deve contenere x, y, e quindi X, Y, nella sola combinazione $\frac{X^n}{Y}$. Di qui segue, anzitutto che $n' = 0$, ossia $n =$ cost., in secondo luogo, che $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, ed inoltre per $n \neq 1$ che $\beta_1 = \alpha_2 = 0$. Da quest'ultima relazione si ha $\frac{a_i'}{a_i} = \frac{b_i'}{b_i}$, e denotando con p_i tale rapporto la $\gamma_i = 0$ diviene $c_i' - p_i c_i = 0$. Di qui si ha, indicando con λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 delle quantità costanti:

$$b_1 = \lambda_1 a_1, \quad b_2 = \lambda_2 a_2, \quad c_1 = \mu_1 a_1, \quad c_2 = \mu_2 a_2,$$

$$w = \Phi\left(\frac{(x + \lambda_1 y + \mu_1)^n}{x + \lambda_2 y + \mu_2}\right),$$

dove Φ dovrà essere una funzione algebrica, n un numero razionale.

14. Se $n = 1$, e se si pone $b_i = a_i l_i$, $c_i = a_i m_i$, le relazioni $\gamma_i = 0$ divengono:

$$\frac{l_1'}{l_1 - l_2} = \frac{m_1'}{m_1 - m_2}, \quad \frac{l_2'}{l_1 - l_2} = \frac{m_2'}{m_1 - m_2},$$

donde si ottiene facilmente, denotando con λ_1, μ_2 due costanti:

$$l_1 = \frac{1}{\mu_2} m_1 + \lambda_1, \quad l_2 = \frac{1}{\mu_2} m_2 + \lambda_1,$$

e quindi facendo $x + \lambda_1 y = \xi$, $y + \mu_2 = \eta$:

$$X = a_1\left(\xi + \frac{m_1}{\mu_2}\eta\right), \quad Y = a_2\left(\xi + \frac{m_2}{\mu_2}\eta\right),$$

sicchè invece di $\Phi\left(\frac{X}{Y}, z\right)$ può scriversi $\Phi\left(\frac{\xi}{\eta}, z\right)$, ed infine dovendo Φ essere indipendente da z:

$$w = \Phi\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = \Phi\left(\frac{x + \lambda_1 y}{y + \mu_2}\right).$$

15. Veniamo ora alla forma $\Phi(X^m + RY, z)$, dove $m \neq 1$ e $m \neq 0$ (v. n° 4). Per la solita ragione l'espressione:

$$mX^{m-1}(\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1) + R'Y + R(\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2)$$

dovrà contenere X, Y nella sola combinazione $X^m + RY$; quindi sarà $\beta_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = 0$, e conservando le notazioni del n. 13:

$$w = \Phi\,[\mathrm{a}_1^m(x + \lambda_1 y + \mu_1)^m + R\mathrm{a}_2(x + \lambda_2 y) + R\mathrm{c}_2,\ z],$$

che può anche scriversi, ponendo $x + \lambda_1 y + \mu_1 = \xi$, $x + \lambda_2 y = \eta$, e denotando con S una funzione di z:

$$w = \Phi\,(\xi^m + S\eta,\ z).$$

Ora S deve ridursi ad una costante; infatti essendo:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial(\xi^m + S\eta)} S'\eta,$$

e ξ, η figurando nelle derivate parziali di Φ soltanto nella combinazione $\xi^m + S\eta$, lo stesso dovrà aver luogo per $S'\eta$, donde segue $S' = 0$. Adunque indicando con k una costante si ha:

$$w = \Phi(\xi^m + k\eta) = \Phi\,[(x + \lambda_1 y + \mu_1)^m + k(x + \lambda_2 y)].$$

16. Ci resta ancora l'ultima forma $\Phi\left(\frac{X^m + RY}{X},\ z\right)$, dove $m \neq 1$ e $m \neq 0$ (v. n° 4). Col ragionamento più volte ripetuto si stabilisce che nell'espressione:

$$\left((m-1)X^{m-2} - \frac{RY}{X^2}\right)(\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1) + \frac{R}{X}(\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2) + R'\frac{Y}{X}$$

X ed Y devono figurare unicamente nella combinazione $\dfrac{X^m + RY}{X}$, donde segue $\beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Dalle $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ risulta come prima $\mathrm{b}_1 = \lambda_1 \mathrm{a}_1$, $\mathrm{c}_1 = \mu_1 \mathrm{a}_1$. Se ora si pone $\mathrm{b}_2 = l_2 \mathrm{a}_2$, $\mathrm{c}_2 = m_2 \mathrm{a}_2$, si ha:

$$0 = \gamma_2 = \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2\,[\mathrm{a}_2'(\lambda_1 m_2 - \mu_1 l_2) + (l_2 \mathrm{a}_2' + l_2' \mathrm{a}_2)(\mu_1 - m_2)$$
$$+ (m_2 \mathrm{a}_2' + m_2' \mathrm{a}_2)(l_2 - \lambda_1)] = \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2^2[-\,l_2'(m_2 - \mu_1) + m_2'(l_2 - \lambda_1)],$$

da cui:

$$\frac{m_2'}{m_2 - \mu_1} = \frac{l_2'}{l_2 - \lambda_1},\quad m_2 - \mu_1 = \nu(l_2 - \lambda_1),$$

dove ν è la costante d'integrazione. Dopo ciò si ha, ponendo

$$x + \lambda_1 y + \mu_1 = \xi, \qquad y + \mu_2 = \eta,$$

$$X = a_1 \xi, \quad Y = a_2 (x + l_2 y + \mu_2) = a_2 [\xi + (l_2 - \lambda_1)\eta],$$

$$w = \Phi\left[a_1^{m-1} \xi^{m-1} + \frac{R a_2}{a_1}\left(1 + (l_2 - \lambda_1)\frac{\eta}{\xi}\right), z\right],$$

ossia $w = \Phi\left(\xi^{m-1} + S\frac{\eta}{\xi}, z\right)$. Come nel numero precedente, si dimostra che S deve ridursi ad una costante, sicchè si ha infine:

$$w = \Phi\left(\xi^{m-1} + k\frac{\eta}{\xi}\right) = \Phi\left[(x + \lambda_1 y + \mu_1)^{m-1} + k\frac{y + \mu_2}{x + \lambda_1 y + \mu_1}\right].$$

17. Adunque siamo ridotti alle tre forme $\Phi\left(\frac{\xi^m}{\eta}\right)$, $\Phi(\xi^m + k\eta)$, $\Phi\left(\xi^m + k\frac{\eta}{\xi}\right)$, dove Φ è funzione algebrica, k ed m sono costanti, di cui quest'ultima razionale, ξ ed η sono funzioni lineari intere di x, y a coefficienti costanti.

Se $\frac{d\xi}{dz} = u_1 \xi + v_1 \eta + w_1$, $\frac{d\eta}{dz} = u_2 \xi + v_2 \eta + w_2$ sono le equazioni lineari simultanee a cui soddisfanno ξ, η, e se si denota in generale con W l'argomento di Φ, sarà $w = \Phi(W)$, e:

$$f(w, z) = f[\Phi(W), z]$$

$$= \Phi'(W)\left[(u_1\xi + v_1\eta + w_1)\frac{\partial W}{\partial \xi} + (u_2\xi + v_2\eta + w_2)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right]. \quad (24)$$

È facile vedere che per tutte le 3 forme di W il coefficiente di $\Phi'(W)$, che deve ridursi ad una funzione delle sole W, z, è lineare rispetto W, sicchè, indicando con M, N due funzioni algebriche di z, si ha:

$$\frac{dW}{dz} = MW + N, \; f(w, z) = \Phi'(W)[MW + N].$$

Reciprocamente, se esiste una trasformazione $w = \Phi(W)$ per cui

$f(w, z)$ assume la forma testè scritta, w potrà esprimersi algebricamente mediante gli integrali di due equazioni lineari simultanee del 1° ordine.

Per trovare poi queste equazioni basta identificare $M W + N$ col coefficiente di $\Phi'(W)$ nella (24). — Per $W = \frac{\xi^m}{\eta}$ si trova così:

$$M \frac{\xi^m}{\eta} + N = \frac{m\xi^{m-1}}{\eta}(u_1\xi + v_1\eta + w_1) - \frac{\xi^m}{\eta^2}(u_2\xi + v_2\eta + w_2),$$

quindi $v_1 = w_1 = u_2 = w_2 = N = 0$, $m u_1 - v_2 = M$, e le equazioni lineari sono:

$$\frac{d\xi}{dz} = u_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dz} = (m u_1 - M)\eta,$$

u_1 essendo una funzione qualunque di z. — Per $W = \xi^m + k\eta$ si ha:

$$M(\xi^m + k\eta) + N = m\xi^{m-1}(u_1\xi + v_1\eta + w_1) + k(u_2\xi + v_2\eta + w_2),$$

quindi $v_1 = w_1 = u_2 = 0$, $m u_1 = M$, $k v_2 = k M$, $k w_2 = N$, e le equazioni lineari sono:

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{m} M\xi, \quad \frac{d\eta}{dz} = M\eta + \frac{1}{k} N. —$$

Infine per $W = \xi^m + k\frac{\eta}{\xi}$ si ha:

$$M\left(\xi^m + k\frac{\eta}{\xi}\right) + N = \left(m\xi^{m-1} - \frac{k\eta}{\xi^2}\right)(u_1\xi + v_1\eta + w_1)$$
$$+ \frac{k}{\xi}(u_2\xi + v_2\eta + w_2),$$

quindi $v_1 = w_1 = w_2 = 0$, $m u_1 = M$, $k(v_2 - u_1) = kM$, $k u_2 = N$, e le equazioni lineari sono:

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{m} M\xi, \quad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{k} N\xi + \frac{m+1}{m} M\eta.$$

È questo il solo caso in cui le 2 equazioni sono *effettivamente* simultanee; gli altri due sono già contemplati nelll'ultimo teorema della 1ª parte di questo scritto.

18. Il risultato delle nostre ricerche si riassume nel seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine $\frac{dw}{dz} = f(w, z)$ *abbia un integrale della forma* $F(x, y)$, *dove* F *è una funzione algebrica*, x *ed* y *sono integrali fra loro algebricamente indipendenti di due equazioni algebrico-differenziali lineari simultanee del primo ordine, è che esista una trasformazione algebrica* $w = \Phi(W)$ *della varibile dipendente, la quale trasformi l'equazione data in un'equazione lineare* $\frac{dW}{dz} = M(z)W + N(z)$. *Se* $N(z) \equiv 0$, *esistono infiniti integrali della forma* $\Phi\left(\frac{x^m}{y}\right)$, *dove* m *è un numero razionale; se* $N(z)$ *non è identicamente nullo, esistono infiniti integrali delle due forme* $\Phi(x^m + ky)$, $\Phi\left(x^m + k\frac{y}{x}\right)$, *dove* m *ha lo stesso significato di prima, e* k *è una costante qualunque. Le equazioni lineari a cui soddisfanno* x, y *sono per le 3 forme rispettivamente, indicando con* P *una funzione algebrica qualunque di* z:

$$\frac{dx}{dz} = Px, \quad \frac{dy}{dz} = (mP + M)y;$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{m}Mx, \quad \frac{dy}{dz} = My + \frac{1}{k}N;$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{m}Mx, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{k}Nx + \frac{m+1}{m}My.$$

Mantova, 7 aprile 1890.

G. VIVANTI.

SU CERTE FUNZIONI POTENZIALI DI MASSE

DIFFUSE IN TUTTO LO SPAZIO INFINITO;

Memoria di **M. Gebbia**, in Palermo.

Adunanze del 5 e 12 gennajo 1890.

Le funzioni potenziali newtoniane di masse occupanti campi a tre dimensioni vanno ordinariamente considerate con la restrizione che il campo occupato dalla massa non si estenda indefinitamente in tutti i sensi. Però la considerazione di funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito non è un'astrazione deficiente d'importanza per le applicazioni alla Fisica. Funzioni siffatte si presentano, per esempio, in qualche argomento della teoria dell'Elasticità, ove precisamente avviene che la densità di una massa fittizia occupante tutto lo spazio è rappresentata da una somma di derivate seconde di funzioni potenziali di altre masse pure fittizie, le quali a loro volta sono racchiuse entro un'estensione finita.

Qualunque sia la funzione che rappresenta in tutto lo spazio la densità, l'espressione più naturale delle funzioni di cui parliamo, derivante dalla loro stessa definizione, è quella d'integrali estesi a tutto lo spazio. Però si presenta subito la quistione di sapere se un integrale così fatto abbia un valor finito e determinato o, in altri termini, se la funzione da esso definita esista. Ed infatti s'intende *a priori* che la massa agente può esser distribuita in tutto lo spazio in modo, che la funzione potenziale, e quindi l'azione sopra ogni punto, riesca infinita. Que-

sta quistione non può esser risoluta, che con particolar esame relativo a ciascun caso.

L'importanza che gode per le applicazioni il caso, di cui ho fatto cenno, cioè che la densità sia una derivata seconda di funzione potenziale ordinaria, mi ha invogliato ad intraprenderne l'esame, ed ho voluto generalizzare questo studio considerando i casi che la densità in tutto lo spazio sia una funzione potenziale di massa occupante un'estensione finita, o una derivata prima, o seconda, di funzione siffatta. Quanto a quest'ultima funzione potenziale ho supposto che possa essere di un corpo, o di una superficie, o di un doppio strato superficiale. Tale è lo scopo del presente lavoro (*).

Eccettuato il caso che la densità sia espressa dalla funzione potenziale di un corpo o di una superficie, la massa intera della quale non sia nulla, ho trovato che le funzioni in discorso sono sempre finite, ed il calcolo mi ha condotto ad esprimerle per integrali definiti presi fra limiti finiti, cioè estesi al corpo o alla superficie, che con la loro funzione potenziale o con le derivate di questa, assegnano la densità. Si vedrà come in questa quistione compariscano per un ufficio importante le funzioni potenziali che sogliono chiamarsi dirette.

Nel caso che la densità sia una funzione potenziale di corpo o di semplice strato ho condotto il calcolo servendomi del notissimo teorema di Gauss sui valori che prende una funzione potenziale sopra una sfera. Per estendere lo stesso metodo al caso che la densità sia una derivata prima delle stesse funzioni potenziali, ho dovuto estendere il teorema di reciprocità di Gauss alle derivate, e ne ho ricavato un corollario sui valori che prende sopra una sfera la derivata d'una funzione potenziale secondo una direzione fissa dello spazio. Anche di queste estensioni per sè stesse faccio scopo incidentale al presente scritto, sebbene esse non costituiscano risultati sostanzialmente nuovi, come mostrerò in seguito, ma perchè la loro connessione col teorema di

(*) In uno studio sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi, del quale ho già delineato i tratti fondamentali, e che spero di pubblicare quanto prima, ho avuto bisogno di far uso delle funzioni che formano oggetto della presente Memoria. L'estensione che dò alla definizione di queste funzioni ha ragion d'essere nelle applicazioni che in questo studio m'è occorso di farne.

reciprocità non si trova comunemente notata. Per procedere al caso che la densità sia una derivata seconda delle stesse funzioni, ho dovuto abbandonare il metodo precedente, il quale va in difetto. Però con semplicissimo artifizio ho ricavato le formole relative a questo caso da quelle ottenute pei casi precedenti. Finalmente ho studiato i casi che la densità sia una funzione potenziale di doppio strato o una derivata prima o seconda di cotal funzione, servendomi del solito processo che serve a definire quest'ultima come il limite di una funzione potenziale di semplice strato.

I risultati che ho raggiunto sono compendiati nelle formole seguenti. Sia K un corpo o una superficie occupata da massa di densità ρ, in modo che la massa totale sia M; sia V_k la funzione potenziale di K esprimente, per sè stessa o per le sue derivate, la densità della nuova massa diffusa in tutto lo spazio; sia W_k questa stessa funzione quando si tratta di un doppio strato disteso sulla superficie K, e μ il relativo momento; sia

$$R^2 = (x_h - a)^2 + (y_h - b)^2 + (z_h - c)^2$$

il quadrato della distanza fra il punto potenziante (x_h, y_h, z_h) per la funzione che si cerca ed il relativo punto potenziato (a, b, c).

Si ha, quando K è un corpo a tre dimensioni:

$$Q_0 = \int_{S_\infty} \frac{V_k\,dS}{R} \begin{cases} = \infty & \text{se } M \gtrless 0, \quad (3)' \\ = -2\pi \int_K R\rho\,dS & \text{se } M = 0, \quad (3) \end{cases}$$

$$(5) \qquad Q_x = \int_{S_\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x_h}\frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial}{\partial a}\int_K R\rho\,dS,$$

$$(7) \qquad Q_{xx} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_h^2}\frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K R\rho\,dS,$$

$$(8) \qquad Q_{yz} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial y_h \partial z_h}\frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \partial c}\int_K R\rho\,dS,$$

nelle quali $dS = dx_h dy_h dz_h$.

Quando K è una superficie coperta da semplice strato si ha:

$$(4)' \qquad (4) \qquad q_0 = \int_{S_\infty} \frac{V_k dS}{R} \begin{cases} = \infty & \text{se } M \gtrless 0, \\ = -2\pi \int_K R\rho d\varsigma & \text{se } M = 0, \end{cases}$$

$$(6) \qquad q_x = \int_{S_\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K R\rho d\varsigma,$$

$$(9) \qquad q_{xx} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K R\rho d\varsigma + 4\pi \int_K \frac{\rho \alpha^2 d\varsigma}{R},$$

$$(10) \qquad q_{yz} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial y_k \partial z_k} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \int_K R\rho d\varsigma + 4\pi \int_K \frac{\rho \beta \gamma d\varsigma}{R},$$

nelle quali α, β, γ, sono i coseni direttori della normale n alla superficie; $d\varsigma$ è l'elemento superficiale di K espresso nelle coordinate x_k, y_k, z_k, cioè

$$d\varsigma = \frac{dx_k dy_k}{\cos(R, z)}.$$

Quando la superficie K è coperta da doppio strato:

$$(11) \qquad \chi_0 = \int_{S_\infty} \frac{W_k dS}{R} = -2\pi \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma$$

$$(12) \qquad \chi_x = \int_{S_\infty} \frac{\partial W_k}{\partial x_k} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma - 4\pi \int_K \frac{\mu \alpha d\varsigma}{R}$$

$$(13) \qquad \chi_{xx} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial y_k \partial z_k} \frac{dS}{R}$$

$$= -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma - 4\pi \int_K \{\mu[\alpha \Delta_2 x_k + \Delta_1(\alpha, x_k)] + 2\alpha \Delta_1(\mu, x_k)\} \frac{d\varsigma}{R}$$

$$+ 4\pi \int_K \mu \alpha^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d\varsigma - 4\pi \int_s \mu \alpha \frac{\partial x_k}{\partial \nu} \frac{ds}{R},$$

$$(14)\qquad \chi_{yz} = \int_{S\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial z_h} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma$$

$$-2\pi \int_K \{\mu[\beta \Delta_2 z_h + \gamma \Delta_2 y_h + \Delta_1(\beta, z_h) + \Delta_1(\gamma, y_h)] + 2[\beta \Delta_1(\mu, z_h) + \gamma \Delta_1(\mu, y_h)]\} \frac{d\varsigma}{R}$$

$$+ 4\pi \int_K \mu \beta \gamma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d\varsigma - 2\pi \int_s \mu \left(\beta \frac{\partial z_h}{\partial \nu} + \gamma \frac{\partial y_h}{\partial \nu} \right) \frac{ds}{R},$$

nelle quali s rappresenta il contorno completo della superficie K; ν è la normale ad s contenuta nel piano tangente e rivolta verso la superficie; Δ_1 e Δ_2 indicano i parametri differenziali del 1° e del 2° ordine sulla superficie secondo Beltrami.

Chiudo il presente lavoro con tre osservazioni. La prima mette in chiaro come le funzioni considerate sodisfino all'equazione di Poisson in tutto lo spazio. La seconda riguarda l'applicazione delle formole precedenti al caso che la densità della massa agente in tutto lo spazio sia una combinazione lineare di derivate prime o seconde di funzioni potenziali e, in particolare, che sia la Δ^2 di una funzione siffatta. Quest'ultimo caso si riattacca alla nota proprietà, che gode la funzione potenziale diretta, di sodisfare in tutto lo spazio esterno alla massa all'equazione $\Delta^2 . \Delta^2 = 0$. La terza osservazione è rivolta a mostrare come dalle formole precedenti si possano dedurre col massimo agio le discontinuità che presentano le funzioni potenziali dirette superficiali o le loro derivate attraverso la superficie agente, e si viene a concludere che fra tutte non sono discontinue altro, che le derivate seconde delle funzioni potenziali di doppio strato.

---

§ 1.—Estensione del teorema di reciprocità di Gauss.

1. Consideriamo nello spazio due gruppi H e K di punti. In quelli del gruppo H siano concentrate le masse $m_1, m_2, \ldots$ e in quelli del gruppo K le masse $n_1, n_2, \ldots$. Siano x_h, y_h, z_h e, rispettivamente, x_k, y_k, z_k le coordinate dei punti di masse m_h ed n_k, e sia r_{hk} la distanza fra questi due punti, cioè:

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2,$$

onde si ha identicamente

$$(a)\qquad \frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_h} = -\frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_k}.$$

Siano poi V_h e V_k le funzioni potenziali dei gruppi H e K rispettivamente, e segniamo con $(V_h)_k$ il valore della funzione V_h nel punto (x_k, y_k, z_k) e con $(V_k)_h$ quello di V_k nel punto (x_h, y_h, z_h), cioè

$$(V_h)_k = \sum_h \frac{m_h}{r_{hk}}, \qquad (V_k)_h = \sum_k \frac{n_k}{r_{hk}}.$$

Differenziando la prima di queste eguaglianze rispetto ad x_k e la seconda rispetto ad x_h, abbiamo

$$\frac{\partial (V_h)_k}{\partial x_k} = \sum_h m_h \frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial (V_k)_h}{\partial x_h} = \sum_k n_k \frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_h}.$$

Moltiplicando la prima di queste per n_k e sommando le equazioni analoghe per tutti i punti di K; poi moltiplicando la seconda per m_h e sommando per tutti i punti di H, si ottiene

$$\sum_k n_k \frac{\partial (V_h)_k}{\partial x_k} = \sum_k n_k \sum_h m_h \frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_k},$$

$$\sum_h m_h \frac{\partial (V_k)_h}{\partial x_h} = \sum_h m_h \sum_k n_k \frac{\partial \frac{1}{r_{hk}}}{\partial x_h}.$$

Ora ciascuno dei secondi membri si riduce ad una somma semplice estesa a tutte le coppie di punti formati di un punto di H ed uno di K e, per l'identità (a) queste due somme sono uguali e di segno contrario. Così si ha, pure identicamente,

$$(b)\qquad \sum_k n_k \frac{\partial (V_h)_k}{\partial x_k} = -\sum_h m_h \frac{\partial (V_k)_h}{\partial x_h}.$$

Se poi le masse m_h sono diffuse continuamente sopra un'estensione finita H (superficie o corpo) e le masse n_k sopra un'estensione finita K, i sommatorii si traducono in integrali estesi rispettivamente pei campi H e K. Se dunque ρ_h e ρ_k sono le densità delle masse diffuse per H e K, la (b) diventa:

$$\text{(1)} \qquad \int_K \rho_k \frac{\partial V_h}{\partial x_k} dK = -\int_H \rho_h \frac{\partial V_k}{\partial x_h} dH ,$$

nella quale abbiamo omesso i secondi indici delle V_h, V_k, perchè i punti, ai quali si riferiscono i valori di queste funzioni, sono indicati ormai sufficientemente dai campi d'integrazione.

La formola (1), alla quale intendevamo pervenire, è un'estensione del teorema di reciprocità di Gauss espresso dall'eguaglianza

$$\int_K \rho_k V_h dK = \int_H \rho_h V_k dH$$

e significa che questo teorema è pure valido, a meno di un cambiamento di segno, quando al posto delle funzioni potenziali si sostituiscono le loro derivate rispetto a una direzione fissa dello spazio (*).

2. Prendiamo come estensione H la superficie σ di una sfera di raggio R con centro nel punto di coordinate a, b, c, onde

$$R^2 = (x_h - a)^2 + (y_h - b)^2 + (z_h - c)^2$$

(*) Non mi fo illusione che questa maniera di ottenere la formola (1) non manchi di quel rigore che pretende l'Analisi moderna, difetto del quale non va esente la dimostrazione data da Gauss al suo teorema di reciprocità nella Memoria: *Allgemeine Lehrsätze* etc. (Werke, Bd. V, n° 19), dimostrazione sulla quale ho plasmato la mia. Però mi son persuaso che la revisione degli elementi dell'Analisi non è ancora abbastanza progredita perchè si possa immediatamente sostituire a questa forma di dimostrazione altra che presenti tutto il rigore desiderato.

La formola (1) è ben lontana dall'essere nuova. Ripetendola per gli assi delle y e delle z si hanno tre equazioni, le quali esprimono che la risultante delle azioni esercitate dagli elementi di H su K è uguale e direttamente contraria a quella delle azioni esercitate dagli elementi di K su H. Però non m'è accaduto di trovar notata questa connessione che lega l'eguaglianza fra l'azione e la reazione mutua newtoniane di due masse col teorema di reciprocità di Gauss.

e ponghiamo $\rho_k = 1$. Allora, segnando con l la distanza fra il centro della sfera ed il punto potenziato da essa, abbiamo

$$(V_k)_i = 4\pi R, \qquad (V_k)_e = \frac{4\pi R^2}{l},$$

ove con gl'indici i ed e sono distinti i valori di V_k riferentisi a punti interni o esterni alla sfera.

Siccome nelle applicazioni che noi faremo i punti potenziati dalla sfera apparterranno al corpo (o superficie) K, scriviamo

$$l^2 = (x_k - a)^2 + (y_k - b)^2 + (z_k - c)^2.$$

Ciò posto, abbiamo

$$\frac{\partial (V_k)_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial (V_k)_e}{\partial x_k} = 4\pi R^2 \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial x_k} = -4\pi R^2 \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a}$$

e, sostituendo nell'equazione (1), otteghiamo

$$(2) \qquad \int_\sigma \frac{\partial V_k}{\partial x_k} d\sigma = 4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial a} \int_{K_e} \frac{\rho_k dK}{l},$$

ove con K_e abbiamo indicato la porzione di K situata all'esterno della sfera.

Questa formola esprime un'estensione dell'importante corollario ricavato da Gauss dal teorema di reciprocità, cioè di quello espresso dall'eguaglianza

$$(2)_0 \qquad \int_\sigma V_k d\sigma = 4\pi R M_i + 4\pi R^2 \int_{K_e} \frac{\rho_k dK}{l}.$$

Si può esprimere il risultato contenuto nella (2) dicendo che la media aritmetica dei valori che prende sopra una superficie sferica la derivata d'una funzione potenziale rispetto a una direzione fissa dello spazio è uguale al valore che prende nel centro della sfera la derivata

omonima della funzione potenziale dovuta alle sole masse esterne alla sfera (*).

§ 2. — Calcolo della funzione potenziale di una massa, la cui densità in tutto lo spazio sia la funzione potenziale V_k di un corpo o di una superficie K.

3. Consideriamo prima il caso che K sia un corpo. Siano a, b, c le coordinate del punto potenziato per la funzione Q_0 che si cerca; x_h, y_h, z_h quelle del punto potenziante per la stessa funzione, il quale a sua volta è potenziato per la funzione V_k; x_k, y_k, z_k le coordinate di un punto qualunque del corpo K. Si ha per definizione

$$Q_0 = \int_{S_\infty} \frac{V_k dS}{R}, \qquad V_k = \int_K \frac{\rho dK}{r},$$

ove

$$dS = dx_h dy_h dz_h, \qquad dK = dx_k dy_k dz_k;$$

con l'indice S_∞ abbiam voluto intendere che l'integrazione debba estendersi a tutto lo spazio; ρ è la densità del corpo K nel punto (x_k, y_k, z_k) e le distanze R ed r son definite dalle formole

$$R^2 = (x_h - a)^2 + (y_h - b)^2 + (z_h - c)^2$$
$$r^2 = (x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2.$$

(*) Il primo membro della (2) esprime la componente secondo l'asse delle x della risultante delle forze attraenti la superficie sferica omogenea provenienti dal corpo K. Se K si riduce ad un punto e questo è situato all'interno della sfera, la formola (2) ci dice che la detta componente è nulla, e del pari nulle sono le componenti secondo gli assi delle y e delle z, onde sarà nulla la risultante in discorso. Se poi K si riduce ad un punto esterno alla sfera, si conclude analogamente dalla (2) che il punto attrae la superficie sferica omogenea come attirerebbe il centro di essa, nel quale ne fosse concentrata la massa. Si vede dunque che il risultato espresso dalla (2), non che esser nuovo, è equivalente alle notissime proprietà dell'attrazione esercitata dalle superficie o dai gusci sferici sopra un punto, salvo che d'ordinario si parla dell'azione esercitata dalla superficie sopra un punto e qui la cosa si presenta rovesciata, ciò che non monta. Invero si potrebbe costituire la formola (2) esprimendo coteste proprietà per un elemento qualunque di K e integrando per tutta K. Però anche di queste proprietà non credo che sia stata notata la connessione col teorema di Gauss.

Proponghiamoci di calcolare l'integrale Q_0 in coordinate polari con polo nel punto (a, b, c). A tal uopo segniamo con σ la superficie sferica di raggio R, sicchè si avrà

$$dS = dR.\, d\sigma.$$

La parte di Q_0 dovuta all'elemento potenziante del prim'ordine compreso fra le superficie sferiche di raggi R ed $R + dR$ sarà

$$\int_\sigma V_i \frac{d\sigma.\, dR}{R},$$

e, poichè $\frac{dR}{R}$ è costante per questa integrazione, sviluppando l'integrale con la formola $(2)_0$, questa parte sarà

$$\frac{dR}{R}\int_\sigma V_i d\sigma = 4\pi dR \int_{K_i} \rho\, dK + 4\pi R dR \int_{K_e} \frac{\rho\, dK}{l},$$

ove intendiamo riprodotte tutte le notazioni del n° precedente. Per ottenere Q_0 basta integrare l'espressione di sopra rispetto ad R fra i limiti 0 ed ∞, cioè

$$(c) \qquad Q_0 = 4\pi \int_0^\infty dR \int_{K_i} \rho\, dK + 4\pi \int_0^\infty R\, dR \int_{K_e} \frac{\rho\, dK}{l}.$$

Supponghiamo dapprima che il punto (a, b, c) sia esterno alla massa K e sia R_0 la minima ed R_1 la massima delle distanze di questo punto dai punti di K. Allora abbiamo

$$(d) \qquad \int_0^\infty dR \int_{K_i} \rho\, dK = \int_{R_0}^{R_1} dR \int_{K_i} \rho\, dK + M \int_{R_1}^\infty dR,$$

perocchè per valori di R inferiori ad R_0 l'integrale esteso a K_i è nullo, e per valori maggiori di R_1 quest'integrale è indipendente da R ed uguale alla massa totale M del corpo K.

Esprimiamo l'integrale esteso a K_i nello stesso sistema di coordinate polari, sicchè, segnando con σ' la sfera di raggio l, onde

$$dK = dl.\, d\sigma',$$

la (d) si scriverà

$$(d)' \qquad \int_0^\infty dR\int_{K_i}\rho\, dK=\int_{R_0}^{R_1}dR\int_{R_0}^{R}dl\int_{\sigma'}\rho\, d\sigma'+M\int_{R_1}^\infty dR.$$

Nel primo termine a destra si scinda l'integrale relativo a dR per parti e, siccome l'integrale relativo a dl è nullo per $R=R_0$, la prima parte sarà

$$R_1\int_{R_0}^{R_1}dl\int_{\sigma'}\rho\, d\sigma', \quad \text{cioè} \quad MR_1;$$

poi, per ottenere la seconda parte, si esegua la derivazione dell'integrale relativo a dl rispetto al suo limite superiore, e siccome per $l=R$ la sfera σ' si riduce a σ, verrà

$$-\int_{R_0}^{R}dR\int_{\sigma}\rho\, d\sigma, \quad \text{cioè} \quad -\int_K R\rho\, dS,$$

e sostituendo, la $(d)'$ diverrà

$$(d)'' \qquad \int_0^\infty dR\int_{K_i}\rho\, dK=-\int_K R\rho\, dS+MR_1+M\int_{R_1}^\infty dR.$$

L'integrale che comparisce al secondo termine di Q_0 si può trasformare analogamente, cioè

$$(e) \quad \int_0^\infty R\,dR\int_{K_i}\frac{\rho\, dK}{l}=\int_0^{R_0}R\,dR\int_K\frac{\rho\, dK}{l}+\int_{R_0}^{R_1}R\,dR\int_R^{R_1}dl\int_{\sigma'}\frac{\rho\, d\sigma'}{l}.$$

Il primo termine a destra è uguale ad

$$\frac{R_0^2}{2}(V_i)_0,$$

ove con $(V_i)_0$ s'indica il valore di V_i nel polo. Il secondo termine, integrando per parti, diventa

$$-\frac{R_0^2}{2}(V_i)_0+\frac{1}{2}\int_{R_0}^{R_1}R^2\,dR\int_\sigma\frac{\rho\, d\sigma}{R},$$

sicchè la (e) prende la forma

$$(e)' \qquad \int_0^\infty R\,dR \int_{K_l} \frac{\rho\, dK}{l} = \frac{1}{2}\int_K R\rho\, dS.$$

Sostituendo poi le espressioni $(d)''$, $(e)'$ nella (c), si ottiene

$$Q^0 = -\,2\pi \int_K R\rho\, dS + MR_1 + M\int_{R_1}^\infty dR.$$

Nel caso che il punto (a, b, c) faccia parte del corpo K, si giungerà evidentemente allo stesso risultato, perchè questo, non contenendo R_0, resta immutato anche nell'ipotesi $R_0 = 0$.

Come si vede, l'espressione di Q_0 è generalmente infinita, eccettuato il caso che il corpo sia costituito di masse positive e negative, in modo che la massa totale sia nulla. Così possiamo stabilire le formole seguenti:

$$(3)' \qquad Q_0 = \infty. \qquad \text{se} \quad M \gtrless 0$$

$$(3) \qquad Q_0 = -\,2\pi \int_K R\rho\, dS, \quad \text{se} \quad M = 0.$$

le quali formano l'obbiettivo del presente n°.

4. Nel caso che K sia una superficie e V_k sia la funzione potenziale di una massa distesa su di essa con densità ρ, il calcolo della funzione

$$q_0 = \int_{S_\infty} \frac{V_k\, dS}{R}$$

può esser condotto come al n° precedente a condizione di esprimere gl'integrali di superficie in coordinate polari. Ciò è molto facile, ma, siccome la relativa espressione dell'elemento superficiale non è generalmente usata, mi piace di far cenno del modo di ottenerla.

Si consideri la curva sferica s' intersezione della superficie K con la sfera di raggio l, e poi la superficie conica C che proietta questa curva dal polo. La sfera di raggio $l+dl$ determina sulla superficie un'al-

tra curva sferica s'' e sul cono C una curva s_2, in modo che l'elemento superficiale del prim'ordine chiuso dalle curve s', s'' si proietta sul cono nell'elemento superficiale conico chiuso dalle curve s', s_2. Si divida l'uno e l'altro in elementi del 2° ordine mediante piani condotti pei raggi polari che metton capo ai diversi punti di s' e normalmente al cono. Così ogni elemento di second'ordine di K sarà proiettato sopra un elemento di second'ordine di C. Or l'elemento conico ha il valore $dl.ds'$, intendendo per dS' l'arco elementare della curva s', sicchè si ottiene facilmente

$$dK = \frac{dl.ds'}{\text{sen}\,(l,n)},$$

ove n indica la normale alla superficie K diretta verso l'esterno della sfera di raggio l (*).

Facendo uso di questa forma dell'elemento superficiale, si può riprodurre il calcolo sviluppato al n° 3 applicandolo alla funzione q_0. Basta semplicemente sostituire alle sfere σ, σ' le curve sferiche s, s' di raggi R ed l. Così, chiamando $d\varsigma$ l'elemento della superficie K in quanto questa si riguarda come composta di punti (x_k, y_k, z_k), si perviene alle formole

$$(4)' \qquad q_0 = \infty, \qquad \text{se} \quad M \gtrless 0,$$

$$(4) \qquad q_0 = -2\pi \int_K R\rho\, d\varsigma, \quad \text{se} \quad M = 0.$$

(*) Non vale occuparsi della difficoltà che s'incontra pei punti o linee dove sen $(l, n) = 0$, potendo questa evitarsi spezzando la superficie in parti e facendo ruotare gli assi in modo, che ciò non avvenga per nessuna parte.

§ 3. — Calcolo della funzione potenziale d'una massa, la cui densità in tutto lo spazio sia la derivata $\frac{\partial V_k}{\partial x_k}$ della funzione potenziale di un corpo o di una superficie K.

5. Supponghiamo dapprima che K sia un corpo. Ponghiamo per definizione

$$Q_x = \int_{S_\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \frac{dS}{R}, \qquad V_k = \int_K \frac{\rho\, dK}{r}$$

e calcoliamo Q_x col solito sistema di coordinate polari. La parte di Q_x dovuta all'elemento potenziante del prim'ordine compreso fra le superficie sferiche di raggi R ed $R + dR$ sarà

$$\int_\sigma \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \frac{d\sigma . dR}{R}$$

e, facendo uso della formola (2), si ottiene

$$\frac{dR}{R} \int_\sigma \frac{\partial V_k}{\partial x_k} d\sigma = 4\pi R \frac{\partial}{\partial a} \int_{K_t} \frac{\rho\, dK}{l},$$

sicchè

$$Q_x = 4\pi \int_0^\infty R\, dR \int_{K_t} \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} dK.$$

Supponghiamo prima che il punto (a, b, c) sia esterno al corpo K e segniamo ancora con R_0 ed R_1 la minima e la massima distanza da questo punto ai punti di K. Seguendo i processi d'integrazione adoperati al n° 3, otterremo successivamente:

$$Q_x = 4\pi \int_0^{R_0} R\, dR \int_K \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} dK + \int_{R_0}^{R_1} R\, dR \int_{K_t} \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} dK$$

$$= 2\pi R_0^2 \frac{\partial V_k}{\partial a} + 4\pi \int_{R_0}^{R_1} R\, dR \int_R^{R_1} dl \int \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} d\sigma'$$

$$= 2\pi \int_{R_0}^{R_1} R^2 dR \int_\sigma \rho \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} d\sigma = 2\pi \int_K R^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} dS,$$

e siccome $R^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} = - \frac{\partial R}{\partial a}$, verrà infine

$$Q_x = - 2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K R \rho \, dS \tag{5}$$

formola che, non contenendo R_0, è indipendente dall'ipotesi fatta sulla posizione del punto (a, b, c).

6. Se K è una superficie, possiamo ripetere il calcolo precedente con le mutazioni indicate al n° 4, e perverremo similmente al risultato

$$q_x = - 2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K R \rho \, d\varsigma. \tag{6}$$

§ 4. — Digressione su alcune formole del Beltrami.

7. Il ch. prof. Beltrami in una Nota pubblicata nel 1880 (*) ha esteso e dimostrato alcune formole importantissime già trovate dal sig. C. Neumann e da questo pubblicate senza dimostrazione (**). Mediante le formole del prof. Beltrami si esprimono le derivate prime delle funzioni potenziali di semplice o di doppio strato superficiale per funzioni potenziali di semplice e di doppio strato, funzioni potenziali di distribuzioni lineari estese pel contorno della superficie, e derivate di queste ultime. Riportiamo qui queste formole per l'uso che dobbiamo farne in seguito e, per la dimostrazione, rimandiamo il lettore, che non le conoscesse, alla citata bellissima Nota.

Se V_k e W_k sono risp. le funzioni potenziali di un semplice e di un doppio strato distesi sopra una superficie K, il primo con densità ρ e il secondo con momento μ, e se x_h, y_h, z_h e risp. x_k, y_k, z_k sono

(*) *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali* (Annali di Matematica, serie 2ª, t. X, pp. 46-63).

(**) *Neue Sätze über das Newton'sche Potential.* (Math. Ann., Bd. XVI).

le coordinate dei punti potenziato e potenziante, si ha:

$$(f)\qquad \frac{\partial V_k}{\partial x_k}=\int_K \frac{\rho\Delta_2 x_k+\Delta_1(\rho,x_k)}{r}\,dK-\int_K \rho\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dK+\int_s \rho\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\frac{ds}{r},$$

$$(g)\qquad \frac{\partial W_k}{\partial x_k}=\int_K \frac{\alpha\Delta_2\mu+\Delta_1(\alpha,\mu)}{r}\,dK+\int_K \Delta_1(\mu,x_k)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dK+\int_s \alpha\frac{\partial\mu}{\partial\nu}\frac{ds}{r}+\frac{\partial}{\partial z_k}\int_s\frac{\mu}{r}\,dy_k-\frac{\partial}{\partial y_k}\int_s\frac{\mu}{r}\,dz_k,$$

ove s è il contorno di K e ν è la normale ad s condotta nel piano tangente e verso l'interno di K.

I segni d'operazione Δ_1 e Δ_2 sono stati distinti dal prof. Beltrami coi nomi di parametro differenziale del primo e del second'ordine ed espressi in coordinate curvilinee qualunque u, v definite sulla superficie, mediante le formole

$$(h)\qquad \begin{cases}\Delta_1(\varphi,\psi)=\dfrac{1}{H}\left(M_\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial u}+N_\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\right),\\[2ex] \Delta_2\varphi=\dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial M_\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial N_\varphi}{\partial v}\right);\end{cases}$$

$$(k)\qquad M_\varphi=\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\qquad N_\varphi=\frac{1}{H}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

$$H^2=EG-F^2,$$

ove E, F, G sono i coefficienti della forma quadratica

$$dS^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

esprimente il quadrato di un arco elementare sulla superficie.

8. Chiuderò questo paragrafo dimostrando l'identità seguente, di cui farò uso in seguito:

$$(l)\qquad \beta\Delta_2 z+\Delta_1(\beta,z)=\gamma\Delta_2 y+\Delta_1(\gamma,y).$$

Si deduce dalle (h), (k) che

$$\beta\Delta_2 z + \Delta_1(\beta, z) = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial u}(M_z\beta) + \frac{\partial}{\partial v}(N_z\beta)\right],$$

onde

$$(m) \qquad \begin{aligned} &\beta\Delta_2 z + \Delta_1(\beta, z) - \gamma\Delta_2 y - \Delta_1(\gamma, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(M_z\beta - M_y\gamma) + \frac{\partial}{\partial v}(N_z\beta - N_y\gamma). \end{aligned}$$

Inoltre, se nelle M_y, N_y, M_z, N_z si sostituiscono le note espressioni di E, F, G per le derivate di x, y, z e si tien conto delle relazioni del tipo

$$H\alpha = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

si ottiene facilmente

$$M_y = \alpha\frac{\partial z}{\partial v} - \gamma\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad N_y = \gamma\frac{\partial x}{\partial u} - \alpha\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$M_z = \beta\frac{\partial x}{\partial v} - \alpha\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad N_z = \alpha\frac{\partial y}{\partial u} - \beta\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Con queste relazioni e con le altre:

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial y}{\partial u} + \gamma\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial v} + \beta\frac{\partial y}{\partial v} + \gamma\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

si deduce facilmente

$$M_z\beta - M_y\gamma = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad N_z\beta - N_y\gamma = -\frac{\partial x}{\partial u},$$

le quali, sostituite nella (m), la riducono alla (l).

§ 5. — CALCOLO DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI UNA MASSA, LA CUI DENSITÀ IN TUTTO LO SPAZIO SIA UNA DERIVATA SECONDA $\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2}$ O $\frac{\partial^2 V_k}{\partial y_k \partial z_k}$ DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI UN CORPO O DI UNA SUPERFICIE K.

9. Cominciando a studiare il caso che K sia un corpo, ponghiamo

$$Q_{xx}=\int_{S_\infty}\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2}\frac{dS}{R},\quad Q_{yz}=\int_{S_\infty}\frac{\partial^2 V_k}{\partial y_k \partial z_k}\frac{dS}{R}.$$

Per definizione di Q_x e per la formola (5), abbiamo:

$$Q_x=\int_{S_\infty}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\frac{dS}{R}=-2\pi\frac{\partial}{\partial a}\int_K R\rho\, dS.$$

Operando sulla prima espressione di Q_x si ottiene

$$\frac{\partial Q_x}{\partial a}=\int_{S_\infty}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial a}dS=-\int_{S_\infty}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_k}dS$$

e, poichè $\frac{\partial V_k}{\partial x_k}$ è finita e continua in tutto lo spazio e per altri noti caratteri (*), si può applicare l'integrazione per parti. Allora la prima parte sarà nulla per nota proprietà delle funzioni potenziali, e resterà:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial a}=\int_{S_\infty}\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2}\frac{dS}{R}\, Q_{xx}.$$

Operando poi sulla seconda espressione di Q_x ed uguagliando i risultati, si ottiene

$$Q_{xx}=-2\pi\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K R\rho\, dS. \tag{7}$$

(*) v. Betti, *Teorica delle forze newtoniane*, § VII.

Il calcolo di $Q_{y\zeta}$ si può condurre analogamente differenziando le due espressioni di Q_y rispetto a ζ o di Q_ζ rispetto ad y, e ne verrà

$$(8) \qquad Q_{y\zeta} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \int_K R \rho \, d S.$$

10. Se K è una superficie, scriviamo

$$q_{xx} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_h^2} \frac{d S}{R}, \qquad q_{y\zeta} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial y_h \partial \zeta_h} \frac{d S}{R}.$$

Per queste funzioni il calcolo non può procedere come quello sviluppato al n° precedente, perchè le derivate prime $\frac{\partial V_k}{\partial x_h}$, etc. non sono più finite e continue in tutto lo spazio, ma sono discontinue attraverso la superficie, e dippiù, nel caso d'una superficie aperta, diventano infinite al contorno di questa, come dimostra la formola (f) di Beltrami.

Così supponghiamo, per maggior generalità, la superficie aperta, ma senza interruzioni di continuità e circondiamo il contorno esterno s con una superficie tubulare generata da una circonferenza di raggio piccolissimo t, il cui centro percorra la curva s e il cui piano si mantenga normale a questa curva, e segniamo con Ω lo spazio racchiuso da questo tubo e con ω la sua superficie. Riguardiamo lo spazio doppiamente connesso $S_\infty - \Omega$ come ridotto semplicemente connesso mediante il diaframma costituito dalla stessa superficie K limitata alla linea nella quale incontra il lembo interno della superficie tubulare.

Da una parte abbiamo, per definizione

$$(n) \qquad \frac{\partial q_x}{\partial a} = \lim_{t=0} \frac{\partial}{\partial a} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} \frac{d S}{R}.$$

Ora, differenziando sotto il segno e integrando per parti, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} \frac{d S}{R} = -\int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_h} d S$$

$$= \int_K \left\{ \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_h}\right)' - \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_h}\right)'' \right\} \frac{\alpha \, d\sigma}{R} + \int_\omega \frac{\partial V_k}{\partial x_h} \frac{\cos(t, x)}{R} d\omega + \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_h^2} \frac{d S}{R},$$

dove le derivate di V_k distinte con gl'indici $'$ e $''$ si riferiscono alle facce di K, ove la normale è positiva e negativa rispettivamente.

Si sa da note proprietà che

$$\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right)'-\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right)''=-4\pi\rho\alpha.$$

Ci resta a calcolare il limite a cui tende l'integrale esteso alla superficie ω per $t=0$. Ora, sviluppando in esso la funzione $\frac{\partial V_k}{\partial x_k}$ con la formola (f), s'intende subito che il contributo apportato dagli integrali estesi per K può esser trascurato, perchè i valori di questi integrali, essendo finiti in tutta la superficie ω qualunque sia t, quel contributo svanisce per $t=0$. Quanto all'ultimo termine della (f), esso, per nota proprietà delle funzioni potenziali di linea e per essere t piccolissimo, può esser sostituito dall'espressione

$$-2\rho\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\log t,$$

e quindi l'integrale esteso per ω può esser sostituito dall'altro

$$(o)\qquad -2\rho\int_\omega \rho\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\log t.\frac{\cos(t,\,x)}{R}d\omega.$$

Trascurando una quantità piccolissima rispetto a t, si ha

$$d\omega=t\,d\theta.ds\,,$$

ove t è l'angolo che un raggio qualunque del cerchio generatore del tubo forma con un raggio fisso dello stesso, e ds è l'arco elementare del contorno s. Facendo questa sostituzione, osservando che le funzioni ρ, $\frac{\partial x_k}{\partial \nu}$, t, $\log t$ dell'espressione (o) sono indipendenti da θ e segnando con $\frac{1}{R'}$ il valor medio di $\frac{1}{R}$ lungo la circonferenza di raggio t, l'integrale (o) si trasforma in

$$(p)\qquad -2\int_s\left(\rho\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\frac{t\log t}{R'}\int_0^{2\pi}\cos(t,\,x)d\theta\right)ds.$$

Tutte le funzioni sotto il segno integrale relativo a ds restano sempre finite, eccettuato $\log t$; e siccome

$$(q) \qquad \lim_{t=0} t \log t = 0 \,,$$

s'inferisce che al limite l'integrale (p) svanisce.

Così, sostituendo nella formola (n) ed osservando ancora che

$$\lim_{t=0} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_h^2} \frac{dS}{R} = q_{xx} \,,$$

si ottiene infine

$$\frac{\partial q_x}{\partial a} = -4\pi \int_K \frac{\rho\, \alpha^2 d\tau}{R} + q_{xx} \,.$$

D'altra parte l'equazione (6) dà

$$\frac{\partial q_x}{\partial a} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K R \rho\, d\tau \,,$$

onde, uguagliando, si ricava:

$$(9) \qquad q_{xx} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K R\rho\, d\tau + 4\pi \int_K \frac{\rho\alpha^2 d\tau}{R} .$$

Analogamente si otterrebbe

$$(10) \qquad q_{yz} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b\, \partial c} \int_K R\rho\, d\tau + 4\pi \int_K \frac{\rho\beta\gamma\, d\tau}{R} \,.$$

Il calcolo precedente condurrebbe allo stesso risultato anche quando la superficie presentasse interruzioni di continuità, in guisa che, oltre al contorno esterno, bisognasse considerarne altri interni. Infatti in questo caso, dovendosi circondare anche questi ultimi di superficie tubulari, lo spazio rimanente dall'esclusione di tutti i tubi sarebbe multiplicemente connesso e, per renderlo semplicemente connesso, si dovrebbero aggiungere diaframmi arbitrarii per chiudere i fori lasciati dai tubi interni. Però attraverso questi diaframmi le derivate di V_k restano continue, sicchè i termini da essi introdotti sarebbero nulli.

§ 6. — Calcolo della funzione potenziale di una massa, la cui densità in tutto lo spazio sia la funzione potenziale W_t di un doppio strato disteso sopra una superficie K.

11. Si abbia

$$\chi_\omega = \int_{S_\infty} \frac{W_t dS}{R}, \qquad W_t = \int_K \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dK.$$

Sappiamo che la funzione W_t si può definire come il limite della funzione potenziale di due masse, l'una distesa su K con densità $-\rho$ e l'altra sulla superficie K' luogo delle estremità delle normali positive elevate dai punti di K per una lunghezza costante piccolissima ε, con densità ρ, quando diminuisce ε e cresce ρ indefinitamente in modo, che $\lim \rho\varepsilon = \mu$.

Ciò posto, ponendo

$$V_t = \int_K \frac{\rho dK}{r}, \qquad V'_t = \int_{K'} \frac{\rho dK'}{r'},$$

abbiamo

$$\chi_\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{S_\infty} \frac{(V'_t - V_t) dS}{R}.$$

Siccome la funzione potenziale di superficie $V'_t - V_t$ è dovuta ad una massa totale nulla, e tale resta per tutti i valori di ε, essa è finita e determinata e si può definire applicando la formola (4). Si ha dunque

$$\chi_\omega = -2\pi \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_{K'} R' \rho d\tau' - \int_K R \rho d\tau \right).$$

Ora ogni elemento $d\tau'$ si può far corrispondere ad un elemento $d\tau$ in modo che siano definite dalle estremità delle stesse normali, ed allora, a meno di una quantità piccolissima rispetto ad ε, si ha $d\tau' = d\tau$, onde

$$\chi_\omega = -2\pi \lim_{\varepsilon=0} \int_K \rho\varepsilon \frac{R' - R}{\varepsilon} d\tau,$$

ove R ed R' si corrispondono pure come relativi alle estremità della stessa normale, sicchè

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{R'-R}{\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial n},$$

e quindi, passando al limite si ottiene

$$(11) \qquad \chi_0 = -2\pi \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma.$$

§ 7.—CALCOLO DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI UNA MASSA LA CUI DENSITÀ IN TUTTO LO SPAZIO SIA LA DERIVATA $\frac{\partial W_k}{\partial x_h}$ DELLA FUNZIONE POTENZIALE D'UN DOPPIO STRATO DISTESO SOPRA UNA SUPERFICIE K.

12. Facciamo il calcolo della funzione

$$\chi_1 = \int_{S_\infty} \frac{\partial W_k}{\partial x_h} \frac{dS}{R}$$

seguendo il processo adottato al n° 9. Abbiamo dal n° precedente

$$\chi_0 = \int_{S_\infty} \frac{W_k dS}{R} = -2\pi \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma.$$

Servendosi della prima espressione di χ_0, formiamone la derivata rispetto ad a; e siccome W_k è discontinua attraverso la superficie K, tenghiamo come superficie limite dello spazio, oltre alla sfera di raggio infinito, le due facce di K, sicchè

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial a} = -\int_{S_\infty} W_k \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_h} dS$$

$$= \int_K \frac{(W'_k - W''_k)\alpha \, d\varsigma}{R} + \int_{S_\infty} \frac{\partial W_k}{\partial x_h} \frac{dS}{R}.$$

Qui W_k' e W_k'' sono i valori di W_k sulle facce di K in cui la normale è positiva e negativa rispettivamente, onde

$$W_k' - W_k'' = 4\pi\mu\,;$$

si ha quindi

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial a} = 4\pi \int_K \frac{\mu\alpha\, d\varsigma}{R} + \chi_x.$$

Servendoci poi dell' altra espressione di χ_0, abbiamo immediatamente

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial a} = -\,2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma,$$

sicchè uguagliando, ottenghiamo:

$$\chi_x = -\,2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma - 4\pi \int_K \frac{\mu\alpha\, d\varsigma}{R}. \tag{2}$$

§ 8. — CALCOLO DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI UNA MASSA, LA CUI DENSITÀ IN TUTTO LO SPAZIO SIA UNA DERIVATA SECONDA $\dfrac{\partial^2 W_k}{\partial x_k^2}$ O $\dfrac{\partial^2 W_k}{\partial y_k \partial z_k}$ DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI UN DOPPIO STRATO DISTESO SOPRA UNA SUPERFICIE K.

13. Volendo ancora far uso del metodo seguito al n° precedente, partiamoci dalle due espressioni

$$\chi_x = \int_{S_\infty} \frac{\partial W_k}{\partial x_k} \frac{dS}{R}$$

$$= -\,2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma - 2\pi \int_K \frac{\mu\alpha\, d\varsigma}{R}.$$

Per formare con la prima la derivata $\dfrac{\partial \chi_x}{\partial a}$ osserviamo che $\dfrac{\partial W_k}{\partial x_k}$ è

discontinua attraverso la superficie K e (nell'ipotesi più generale che questa sia aperta) diventa infinita nel contorno, come mostra la formola (g); quindi sopprimiamo dallo spazio S_∞ il volume tubulare definito al n° 10 e, supponendo la superficie continua, togliamo lo spazio rimanente con quest'ultima limitata al lembo interno della superficie tubulare. Così avremo

$$\frac{\partial \chi_x}{\partial a} = \lim_{t=0} \frac{\partial}{\partial a} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial W_k}{\partial x_h} \frac{dS}{R}.$$

Or si ha, integrando per parti,

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial W_k}{\partial x_h} \frac{dS}{R} = \int_K \left\{ \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_h}\right)' - \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_h}\right)'' \right\} \frac{\alpha\, d\varsigma}{R}$$

$$+ \int_\omega \frac{\partial W_k}{\partial x_h} \frac{\cos(t, x)}{R} d\omega + \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} \frac{dS}{R}.$$

Primieramente si ricava dalla formola (g)

$$\left(\frac{\partial W_k}{\partial x_h}\right)' - \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_h}\right)'' = 4\pi \Delta_1(\mu, x).$$

Imaginando poi sostituito nell'integrale esteso per ω il valore di $\frac{\partial W_k}{\partial x_h}$ fornito dalla (g), si riconosce subito che il contributo apprestato dagl'integrali di superficie è nullo. Per calcolare il contributo proveniente dai tre termini al contorno, si osservi che, per essere t piccolissimo, il primo di essi può esser sostituito da

$$-2\alpha \frac{\partial \mu}{\partial \nu} \log t.$$

Dippiù, per la stessa piccolezza di t, possiamo riguardare le funzioni potenziali di linea che compariscono negli ultimi due termini di (g) come dipendenti dalla sola distanza t, e quindi porre

$$\frac{\partial}{\partial y_h} = \cos(t, y) \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_h} = \cos(t, z) \frac{\partial}{\partial t};$$

ed ancora possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s \frac{\mu}{r} d y_1 = -2\frac{\mu}{t}\frac{\partial y_1}{\partial s} = -2\frac{\mu}{t}\cos(y,\ s),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s \frac{\mu}{r} d z_1 = -2\frac{\mu}{t}\frac{\partial z_1}{\partial s} = -2\frac{\mu}{t}\cos(z,\ s),$$

ove s dentro parentesi indica la direzione della tangente al contorno rivolta nel senso positivo dello stesso.

Così ai tre ultimi termini della (g) possiamo sostituire l'espressione

$$-2\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\nu}\log t - 2\frac{\mu}{t}[\cos(t,\ z)\cos(s,\ y) - \cos(t,\ y)\cos(s,\ z)].$$

Si consideri ora nel piano del circolo generatore del tubo un asse λ perpendicolare agli assi t ed s e si assegni il suo senso positivo in modo, che la terna di assi t, λ, s sia congruente della terna x, y, z (Tav., Fig. 1ª, ove agli assi x, y, z sono stati sostituiti le loro parallele dal centro del circolo). Allora si avrà:

$$\cos(t,\ z)\cos(s,\ y) - \cos(t,\ y)\cos(s,\ z) = \cos(\lambda,\ x).$$

Così finalmente all'integrale esteso per ω si può sostituire l'espressione

$$-2\int_\omega \alpha\frac{\partial\mu}{\partial\nu}\frac{\cos(t,\ x)}{R}\log t\,d\omega - 2\int_\omega \frac{\mu}{t}\frac{\cos(t,\ x)\cos(\lambda,\ x)}{R}\,d\omega.$$

Ora, ponendo come al n° 10

$$d\omega = t\,d\theta\,ds,$$

questa espressione diventa

$$(r)\qquad \begin{aligned} &-2\int_s\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\nu}\frac{t\log t}{R'}\int_0^{2\pi}\cos(t,\ x)\,d\theta\right)ds \\ &-2\int_s\left(\frac{\mu}{R'}\int_0^{2\pi}\cos(t,\ x)\cos(\lambda,\ x)\,d\theta\right)ds. \end{aligned}$$

Il primo termine svanisce al limite in virtù dell'eguaglianza (q). Il secondo termine dev'essere ancora trasformato. A tal uopo, con centri nel punto del contorno che si considera e con raggio uguale all'unità si descriva una sfera e poi, trasportando gli assi x, y, z in questo punto, si determinino sulla sfera i punti d'intersezione con essi e con gli assi t, λ, s e si notino questi punti con le stesse lettere.

Sia x' una delle due intersezioni dei circoli massimi sx, λt: si ottiene dai triangoli sferici $\lambda x x'$, $t x x'$:

$$\cos(tx) = \cos(xx')\cos(x't)$$

$$\cos(\lambda x) = \cos(xx')\cos(x'\lambda) = -\cos(xx')\,\text{sen}(x't)$$

Così, contando l'angolo θ a partire da x', abbiamo:

$$\cos(t,\ x)\cos(\lambda,\ x) = -\cos^2(x,\ x')\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,,$$

onde

$$\int_0^{2\pi}\cos(t,\ x)\cos(\lambda,\ x)\,d\theta = -\cos^2(x,\ x')\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = 0\,,$$

da cui s'inferisce che il secondo termine della (r) è nullo.

Riassumendo, si ha

$$\frac{\partial \chi_x}{\partial a} = 4\pi\int_K \Delta_1(\mu,\ x)\frac{\alpha\,d\varsigma}{R} + \chi_{xx}\,.$$

Poi, formando la stessa derivata con la seconda espressione di χ_x, viene

$$\frac{\partial \chi_x}{\partial a} = -2\pi\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma - 4\pi\frac{\partial}{\partial a}\int_K\frac{\mu\,\alpha\,d\varsigma}{R}\,,$$

sicchè uguagliando, si ottiene finalmente

$$(13)' \qquad \chi_{xx} = -2\pi\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma - 4\pi\int_K \Delta_1(\mu,\ x)\frac{\alpha\,d\varsigma}{R} - 4\pi\frac{\partial}{\partial a}\int_K\frac{\mu\,\alpha\,d\varsigma}{R}\,.$$

Questa formola non si altera se la superficie presenta soluzioni di continuità per una considerazione analoga a quella fatta al n° 10.

L'ultimo termine dell'espressione $(13)'$ può ancora trasformarsi mediante la (f), dalla quale, ponendo $\rho = \mu\alpha$, $x_k = a$ e scrivendo R invece di r, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_K \frac{\mu\alpha\, d\tau}{R}$$

$$= \int_K [\mu\alpha\Delta_2 x_h + \Delta_1(\mu\alpha, x_h)]\frac{d\tau}{R} - \int_K \mu\alpha^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d\tau + \int_s \mu\alpha \frac{\partial x_k}{\partial \nu}\frac{ds}{R}$$

e quindi, tenendo anche presente l'identità

$$\Delta_2(\mu\alpha, x_k) = \mu\Delta_1(\alpha, x_h) + \alpha\Delta_1(\mu, x_k)$$

facile a dedursi dalle formole (h) e (k), può darsi infine alla χ_{xx} l'espressione

$$(13) \qquad \chi_{xx} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} d\tau$$

$$- 4\pi \int_K \{\mu[\alpha\Delta_2 x_k + \Delta_1(\alpha, x_h)] + 2\alpha\Delta_1(\mu, x_k)\}\frac{d\tau}{R}$$

$$+ 4\pi \int_K \mu\alpha^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d\tau - 4\pi \int_s \mu\alpha \frac{\partial x_h}{\partial \nu}\frac{ds}{R},$$

che ha il vantaggio di rappresentare, ad esclusione del primo termine, una somma di funzioni potenziali newtoniane.

14. Il calcolo della funzione

$$\chi_{yz} = \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 W_k}{\partial y_h \partial z_h}\frac{dS}{R}$$

si condurrà analogamente partendo dalle uguaglianze

$$\chi_y = \int_{S_\infty} \frac{\partial W_k}{\partial x_h}\frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial}{\partial b}\int_K \mu \frac{dR}{dn} d\tau - 4\pi \int_K \frac{\mu\beta\, d\tau}{R}.$$

Si ha da una parte

$$\frac{\partial Z_r}{\partial c} = \lim_{t=0} \frac{\partial}{\partial c} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial W_k}{\partial y_h} \frac{dS}{R},$$

ove

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial W_k}{\partial y_h} \frac{dS}{R} = 4\pi \int_K \Delta_1(\mu, y) \frac{\gamma d\varsigma}{R}$$

$$+ \int_\omega \frac{\partial W_k}{\partial y_h} \frac{\cos(t, z)}{R} d\omega + \int_{S_\infty - \Omega} \frac{\partial^2 W_k}{\partial y_h \partial z_h} \frac{dS}{R}.$$

Sostituendo nell'integrale esteso ad ω la derivata di W_k con la formola analoga alla (f), si capirà subito che i termini di questa formola relativi alla superficie possono esser trascurati. Quanto ai termini al contorno, si troverà con ragionamenti simili a quelli del n° precedente ch'essi possono esser sostituiti dall'espressione

$$- 2\gamma \frac{\partial \mu}{\partial \nu} \log t - 2 \frac{\mu}{t} \cos(\lambda, y),$$

e quindi l'integrale sudetto può esser sostituito dall'espressione

$$(s) \qquad \begin{aligned} &- 2\int_s \left(\gamma \frac{\partial \mu}{\partial \nu} \frac{t \log t}{R'} \int_0^{2\pi} \cos(t, z) d\theta\right) ds \\ &- 2\int_s \left(\frac{\mu}{R} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda, y) \cos(t, z) d\theta\right) ds. \end{aligned}$$

Il primo di quest'integrali si annulla al limite. Per trasformare il secondo, imaginiamo la sfera di raggio 1 descritta come al n° precedente (Tav. Fig. 2ª) e segniamo con y', z' le intersezioni dei circoli massimi sy, sz col circolo massimo λt (rispettivamente una qualunque delle due intersezioni di ciascuna coppia). Abbiamo dai triangoli sferici $\lambda y y'$, $t z z'$:

$$\cos(\lambda, y) = \cos(\lambda, y') \cos(y', y)$$

$$\cos(t, z) = \cos(t, z') \cos(z', z),$$

cioè

$$(t)\quad \begin{cases} \cos(\lambda, y) = \cos(\lambda, y')\,\mathrm{sen}\,(s, y) \\ \cos(t, z) = \cos(t, z')\,\mathrm{sen}\,(s, z). \end{cases}$$

Poi dal triangolo sferico syz si deduce

$$0 = \cos(s, y)\cos(s, z) + \mathrm{sen}\,(s, y)\,\mathrm{sen}\,(s, z)\cos(y', z'),$$

da cui

$$(u)\quad \begin{cases} \cos(y', z') = -\dfrac{\cos(s, y)\cos(s, z)}{\mathrm{sen}\,(s, y)\,\mathrm{sen}\,(s, z)} \\ \mathrm{sen}\,(y', z') = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2(s, y) - \cos^2(s, z)}}{\mathrm{sen}(s, y)\,\mathrm{sen}(s, z)} = \dfrac{\cos(s, x)}{\mathrm{sen}(s, y)\,\mathrm{sen}(s, z)}. \end{cases}$$

Abbiamo poi

$$(v)\quad \begin{aligned} \cos(\lambda, y') &= \cos(\lambda, z')\cos(y', z') + \mathrm{sen}\,(\lambda, z')\,\mathrm{sen}\,(y', z') \\ &= -\,\mathrm{sen}\,(tz')\cos(y'z') + \cos(tz')\,\mathrm{sen}\,(y'z'). \end{aligned}$$

Allora dalle (t) per mezzo della (v), si ricava

$$\begin{aligned} &\cos(\lambda y)\cos(tz) \\ &= [-\,\mathrm{sen}\,(tz')\cos(tz')\cos(y'z') + \cos^2(tz')\,\mathrm{sen}\,(y'z')] \times \\ &\times \mathrm{sen}\,(sy)\,\mathrm{sen}\,(sz), \end{aligned}$$

la quale, in virtù delle (u) diventa

$$\begin{aligned} &\cos(\lambda y)\cos(tz) \\ &= \mathrm{sen}\,(tz')\cos(tz')\cos(sy)\cos(sz) + \cos^2(tz')\cos(sx). \end{aligned}$$

Adunque, contando gli angoli θ a partire da z', cioè ponendo $(z' t) = \theta$, abbiamo

$$\cos(\lambda y)\cos(t z) = -\frac{\partial y_b}{\partial s}\frac{\partial z_b}{\partial s}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial x_b}{\partial s}\cos^2\theta.$$

Così, ancora avendo riguardo alle eguaglianze

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \pi,$$

il secondo integrale (s) diventa

$$-2\pi\int_s \mu\frac{\partial x_b}{\partial s}\frac{ds}{R'}.$$

Sostituendo nella derivata di χ_y e passando al limite, si ottiene

$$\frac{\partial \chi_y}{\partial c} = 4\pi\int_K \Delta_1(\mu, y)\frac{\gamma d\varsigma}{R} - 2\pi\int_s \mu\frac{\partial x_b}{\partial s}\frac{ds}{R} + \chi_{yz}.$$

Ma d'altra parte si trova

$$\frac{\partial \chi_y}{\partial c} = -2\pi\frac{\partial^2}{\partial b\partial c}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma - 4\pi\frac{\partial}{\partial c}\int_K \frac{\mu\beta d\varsigma}{R},$$

onde uguagliando, viene

$$\begin{aligned}\chi_{yz} = &-2\pi\frac{\partial^2}{\partial b\partial c}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma - 4\pi\int_K \Delta_1(\mu, y)\frac{\gamma d\varsigma}{R}\\ &-4\pi\frac{\partial}{\partial c}\int_K\frac{\mu\beta d\varsigma}{R} + 2\pi\int_s \mu\frac{\partial x_b}{\partial s}\frac{ds}{R}.\end{aligned} \tag{14'}$$

Questa espressione di χ_{yz} ha lo svantaggio grave di non esser simmetrica rispetto alle variabili y e z. Però le seguenti trasformazioni la renderanno tale.

Il terzo termine può essere trasformato mediante la formola (f), che ci dà

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_K\frac{\mu\beta d\varsigma}{R} = \int_K[\mu\beta\Delta_2 z_b + \Delta_1(\mu\beta, z_b)]\frac{d\varsigma}{R}$$
$$-\int_K \mu\beta\gamma\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\varsigma + \int_s \mu\beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu}\frac{ds}{R},$$

e siccome

$$\Delta_1(\mu\beta,\ z_b) = \mu\Delta_1(\beta,\ z_b) + \beta\Delta_1(\mu,\ z_b),$$

diviene

$$
\begin{aligned}
\chi_{yz} = & -2\pi\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial c}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma \\
(14)'' \quad & -4\pi\int_K \{\mu[\beta\Delta_2 z_b + \Delta_1(\beta,\ z_b)] + \beta\Delta_1(\mu,\ z_b) + \gamma\Delta_1(\mu,\ y_b)\}\frac{d\varsigma}{R} \\
& + 4\pi\int_K \mu\beta\gamma\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\varsigma - 2\pi\int_s \mu\left(2\beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu} - \frac{\partial x_b}{ds}\right)\frac{ds}{R}.
\end{aligned}
$$

Ora dall'identità già dimostrata al n° 8

$$(l) \qquad \beta\Delta_2 z + \Delta_1(\beta,\ z) = \gamma\Delta_2 y + \Delta_1(\gamma,\ y)$$

si deduce subito

$$(x) \quad \beta\Delta_2 z_b + \Delta_1(\beta,\ z_b) = \tfrac{1}{2}[\beta\Delta_2 z_b + \gamma\Delta_2 y_b + \Delta_1(\beta,\ z_b) + \Delta_1(\gamma, y_b)].$$

Inoltre dall'uguaglianza

$$\frac{\partial x_b}{\partial s} = \beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu} - \gamma\frac{\partial y_b}{\partial \nu},$$

che s'inferisce dall'ortogonalità delle direzioni s, n, ν, si ricava

$$(y) \qquad 2\beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu} - \frac{\partial x_b}{\partial s} = \beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu} + \gamma\frac{\partial y_b}{\partial \nu}.$$

Sostituendo le espressioni (x), (y) nella $(14)''$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\chi_{yz} = & -2\pi\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial c}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma \\
(14) \quad & -2\pi\int_K \{\mu[\beta\Delta_2 z_b + \gamma\Delta_2 y_b + \Delta_1(\beta, z_b) + \Delta_1(\gamma, y_b)] + 2[\beta\Delta_1(\mu, z_b) + \gamma\Delta_1(\mu, y_b)]\}\frac{d\varsigma}{R} \\
& + 4\pi\int_K \mu\beta\gamma\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\varsigma - 2\pi\int_s \mu\left(\beta\frac{\partial z_b}{\partial \nu} + \gamma\frac{\partial y_b}{\partial \nu}\right)\frac{ds}{R},
\end{aligned}
$$

la quale presenta la desiderata simmetria.

§ 9. — Osservazioni.

15. Le funzioni fin qui studiate sodisfano tutte all'equazione di Poisson in tutto lo spazio. Però non sarebbe rigoroso dedurre questo teorema dal fatto ch'esse sono limiti di funzioni potenziali di masse diffuse entro uno spazio sferico quando si fa crescere indefinitamente il raggio della sfera. Così conviene piuttosto verificare l'enunciata proprietà sulle espressioni che abbiamo dato alle stesse funzioni per integrali definiti estesi pei campi finiti K. A tal uopo basta considerare le due uguaglianze:

$$(\zeta) \qquad \Delta^2 R = \frac{2}{R}, \quad \Delta^2 \frac{\partial R}{\partial n} = 2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n},$$

ove

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2}.$$

Così, per esempio, si ha dalle (7), (13):

$$\Delta^2 Q_{xx} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K \Delta^2 R . \rho dS = -4\pi \frac{\partial^2 V_k}{\partial a^2},$$

$$\Delta^2 \chi_{xx} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K \rho \Delta^2 \frac{\partial R}{\partial n} d\varsigma = -4\pi \frac{\partial^2 W_k}{\partial a^2}.$$

16. Mediante le funzioni fin qui studiate se ne possono formare altre, per le quali la densità in ogni punto dello spazio sia una combinazione lineare di alcune derivate d'una funzione potenziale ordinaria. Fra tali combinazioni è notevole il parametro differenziale del 2° ordine, sul quale vogliamo fermarci un momento. Abbiamo, per esempio, quando K è a tre dimensioni

$$(\alpha) \qquad \int_{S_\infty} \frac{\Delta_h^2 V_k dS}{R} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = -2\pi \Delta^2 \int_K R \rho dS,$$

ove, per distinzione, intendiamo

$$\Delta_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_h^2}.$$

D'altra parte, dalle equazioni di **Laplace** e di **Poisson** si deduce immediatamente che

$$\int_{S_\infty} \frac{\Delta_k^2 V_k dS}{R} = -4\pi \int_K \frac{\rho dS}{R}.$$

L'uguaglianza fra queste due espressioni dello stesso integrale si fonda sulla prima equazione (ζ), e ciò costituisce una conferma delle formole da noi stabilite.

Dippiù l'eguaglianza (α) presenta da un punto di vista notevole il fatto conosciuto, che la funzione potenziale diretta

$$\int_K R\rho dS$$

sodisfa all'equazione $\Delta^2 . \Delta^2 = 0$ fuori dello spazio occupato dal corpo K (*), poichè quest'equazione manifesta che la Δ^2 della funzione potenziale diretta si può riguardare come la funzione potenziale inversa d'una massa occupante tutto lo spazio con densità che, a meno di un fattor costante, è rappresentata da $\Delta_k^2 V_k$ (**).

17. Le espressioni delle funzioni qui considerate per integrali estesi fra limiti finiti potrebbero servire a dimostrare la continuità di queste funzioni in tutto lo spazio, dappoichè non sarebbe rigoroso il dedurre questa continuità dal fatto ch' esse sono limiti di funzioni potenziali ordinarie di corpo. Per ottenere l'intento si dovrebbero svolgere per le funzioni potenziali dirette e per le loro derivate le considerazioni analoghe a quelle, che d'ordinario si fanno per le funzioni potenziali newtoniane e per le derivate di queste, onde studiarne le discontinuità.

Stimiamo utile notare come, rinunziando al rigore, se si accetta

---

(*) v. **Lamé**, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, n° 27.

(**) Ciò del resto è ovvio ed ho voluto presentare quest'osservazione a semplice ulteriore raffronto delle formole stabilite in questo lavoro con quanto è già conosciuto.

per evidente la continuità delle nostre funzioni in tutto lo spazio, si possa invertire il ragionamento che servirebbe a dimostrarla in modo rigoroso, e così dedurre molto semplicemente le discontinuità delle funzioni potenziali dirette e delle loro derivate prime e seconde dalla conoscenza delle discontinuità delle funzioni analoghe newtoniane.

Seguendo questo metodo, basta guardare le formole da noi date, per dedurre subito, quando non è senz'altro evidente, che la funzione potenziale diretta di un corpo e le sue derivate prime e seconde sono continue attraverso la superficie del corpo; continue sono pure attraverso la superficie agente la funzione potenziale diretta di un semplice strato e le sue derivate prime e seconde, e sono anche continue la funzione potenziale diretta di un doppio strato e le sue derivate prime. Ma le derivate seconde di quest'ultima funzione sono discontinue attraverso lo strato; infatti, adoperando la caratteristica $\mathscr{D}$ (*discontinuità*) per indicare la discontinuità d'una funzione attraverso una superficie, cioè la differenza dei valori ch'essa prende in punti infinitamente prossimi ad un punto della superficie, il primo sulla normale positiva e il secondo sulla negativa, la formola $(14)'$, della quale il primo membro è continuo, ci dà

$$0 = -4\pi\mathscr{D}\frac{\partial}{\partial a}\int_K \frac{\mu\alpha d\varsigma}{R} - 4\pi\mathscr{D}\int_K \Delta_1(\mu, x)\frac{\alpha d\varsigma}{R}$$

$$-2\pi\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma,$$

onde, per note proprietà:

$$(15)\qquad \mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma = 8\pi\mu\alpha^2.$$

Analogamente si otterrebbe

$$\mathscr{D}\frac{\partial^2}{\partial b\partial c}\int_K \mu\frac{\partial R}{\partial n}d\varsigma = 8\pi\mu\beta\gamma.$$

Dalla formola (15) si deduce

$$\mathcal{D}\,\Delta^2 \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n}\, d\varsigma = 8\pi\mu\,,$$

e ciò è confermato per mezzo della seconda eguaglianza (ζ) dalla nota proprietà della funzione potenziale newtoniana di doppio strato.

Palermo, gennajo 1890.

MICHELE GEBBIA.

DELLE FAMIGLIE ASSOCIATE DI SISTEMI LINEARI

E DELLE SUPERFICIE UNIVOCAMENTE RAPPRESENTABILI SUL PIANO;

Nota di G. Jung, in Milano.

Adunanza del 25 maggio 1890.

1. Fra le proprietà dei sistemi lineari di curve piane algebriche e le proprietà delle superficie rappresentabili univocamente sul piano esiste, com'è ben noto, un nesso intimo, una specie di correlazione, per la quale, supposti conosciuti tutti i sistemi lineari minimi di genere p, sarebbero note anche tutte le superficie rappresentabili aventi sezioni piane del genere p; e viceversa, supposte conosciute tutte le superficie a sezioni piane del genere p, univocamente rappresentabili sul piano, sarebbero noti anche tutti i sistemi lineari minimi di genere p *che ne sono l'imagine.*

2. Lo studio dei sistemi lineari (di curve piane algebriche) e lo studio delle superficie algebriche rappresentabili (punto per punto sul piano) si sussidiano e completano così a vicenda; sicchè, chi si proponesse il problema di *assegnare tutti i sistemi lineari minimi di un dato genere* p troverebbe aperte due vie conducenti alla soluzione: 1° cercare direttamente la totalità di quei sistemi minimi, *senza preoccuparsi delle superficie ch'eventualmente esse possono rappresentare*; 2° o determinarli indirettamente cercando prima *tutte* le superficie a sezioni piane del genere p, che sono univocamente rappresentabili sul piano, e [illegible] gnandone poi le imagini del minimo ordine.

Or questo secondo metodo non è scevro d'inconvenienti. Di due superficie rappresentabili, a sezioni di genere p, supponiamo che una sia un caso particolare, una specializzazione dell'altra, considerata questa come generale: anche prescindendo dal caso non improbabile che trovate tutte le superficie *generali* resti ignorata taluna delle *particolari*, e data invece la migliore ipotesi, che cioè siano conosciute *tutte* quelle superficie (e le particolari e le generali), non si conseguirebbe con questo secondo metodo la *totalità* cercata dei sistemi lineari di minimo ordine: esistono infatti sistemi lineari del genere p non rappresentativi di superficie, *e questi evidentemente sfuggono tutti alla ricerca*; sicchè il problema rimarrebbe incompletamente risoluto.

3. Chi si proponesse il problema correlativo, cioè di *assegnare tutte le superficie irriduttibili univocamente rappresentabili sul piano e aventi sezioni piane di genere p* troverebbe analogamente aperte due vie alla soluzione: 1° cercare direttamente la totalità di quelle superficie, *senza ricorrere in nessun modo alla loro rappresentazione sul piano*; 2° o determinarle indirettamente cercando prima *tutti* i sistemi lineari minimi del genere dato p, sceverando poi da questi i sistemi che non rappresentano superficie alcuna, finalmente risalendo, pei restanti sistemi, dall'imagine sul piano alla corrispondente superficie nello spazio.

Quando si conoscono *tutti* i sistemi lineari minimi del genere p, *nessuna delle superficie cercate può sfuggire con questo secondo metodo*; si presenta però anche qui un inconveniente, già da altri rilevato (*), che specificherò fra poco e per eliminare il quale non sarà inutile spendere qualche parola.

4. Studiando direttamente i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere qualunque (v. le mie due Memorie: *Ricerche sui sistemi lineari ecc.* nei t. XV e XVI degli Annali di Matematica) parvemi indicato dalla natura stessa della questione di rappresentare tutta una famiglia di sistemi, identici per trasformazioni cremoniane, mediante l'unico si-

(*) Vedasi in questi Rendiconti (t. IV, pag. 86-88) una noticina del Prof. Segre inserita nella Memoria del sig. Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (l. c. pag. 73-88).

stema di minimo ordine che ne fa parte. E in invero, dato questo sistema minimo, con opportune trasformazioni birazionali se ne deducono tutti quanti i sistemi appartenenti alla famiglia ch' esso rappresenta; e viceversa, dato un sistema lineare (*non* di ordine minimo), con opportune trasformazioni cremoniane se ne ricava il corrispondente sistema minimo, il quale *individua* la famiglia cui appartiene il sistema dato: poichè uno stesso sistema mai fa parte di due famiglie differenti. Come già allora ebbi a osservare, questa separazione, del resto affatto formale, dei sistemi lineari in famiglie, semplifica la quistione, senza scapito della generalità; infatti essa limita la ricerca a quella dei sistemi di minimo ordine. Per facilitare tale ricerca ho poi distinto i sistemi di minimo ordine (e conseguentemente le *famiglie* di sistemi lineari) in due classi:

1. La *prima* comprende tutti i sistemi di ordine μ pei quali $r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu$. — Se i punti base sono distinti il sistema minimo è *generale*; è *speciale* nel caso contrario.

2. La *seconda* comprende i sistemi lineari di *minimo* ordine μ pei quali $r_1 + r_2 + r_3 > \mu$. — Questi sistemi sono speciali, in ciascuno di essi i punti base essendo tutti infinitamente vicini a quello di grado più elevato. Inoltre come ho dimostrato (l. c. t. XVI, teor. VII, p. 303 e p. 307) per $p > 0$ è sempre $\mu \leqq 2p + 2$.

Due sistemi di classe diversa sono fra loro irriducibili per trasformazioni cremoniane, perchè appartengono a famiglie differenti; e così pure sono irriducibili due sistemi qualunque della medesima classe, a meno che, come si è detto, non appartengano a una stessa famiglia.

5. Ritornando ora all'argomento di cui sopra parlavo, l'inconveniente che presenta l'applicazione di quel secondo metodo (n° 3) si può precisare così: che due sistemi minimi (o due famiglie di sistemi lineari) differenti, epperò irriducibili per trasformazioni cremoniane, possono corrispondere a due superficie tali che l' una sia un caso particolare (una specializzazione) dell'altra; sicchè, mentre le due superficie non sono essenzialmente diverse, apparirebbero essenzialmente diverse (perchè corrispondenti a sistemi d'ordine minimo affatto diversi) le famiglie di sistemi lineari che le rappresentano sul piano.

Come togliere quest'inconveniente, senza disconoscere la re

stenza delle famiglie (o serie o schiere o varietà che dir si vogliano) di sistemi lineari, identici per trasformazioni cremoniane, le quali rappresentano superficie realmente esistenti anch'esse, benchè sotto certi aspetti si possano riguardare come casi particolari di altre su erficie? Forse associando opportunamente fra loro i sistemi minimi (e le corrispondenti famiglie) delle due classi. Mi spiego. Ogni sistema speciale σ_2 del minimo ordine e della 2ª classe (n° 4) si può considerare come caso particolare (come deformazione) di un determinato sistema Σ_1 della 1ª classe, ma *non* d'ordine minimo: Σ_1 *ha lo stesso simbolo* (*) $[a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \dots a_f^{r_f}]_{\mu,\rho}^{p,D}$ di σ_2, *toltovi soltanto il vincolo che i punti base* a_2, a_3 ... a_f *siano infinitamente vicini ad* a_1. Ma tolto codesto vincolo il sistema considerato cessa di essere del minimo ordine e di appartenere alla 2ª classe: esso rientra nella 1ª classe, prendendovi il posto di Σ_1, e come tale fa parte della famiglia ch'è rappresentata da un determinato sistema *generale* di minimo ordine; sia questo σ_1. Diremo che il sistema (speciale) minimo di 2ª classe σ_2 è *associato* al sistema minimo (generale) di 1ª classe σ_1. Similmente un sistema minimo σ_1' speciale di 1ª classe (cioè con punti base infinitamente vicini) si dirà *associato* al sistema minimo generale di 1ª classe σ_1 avente l'identico suo simbolo, ma nel quale i punti base siano invece distinti; e *famiglie associate* chiameremo quelle che corrispondono a due sistemi minimi associati. Se non si vuol tener conto dei punti base semplici, si dirà che i *tipi normali* σ_2 e σ_1' (e corrispondenti famiglie) sono associati al *tipo normale* di 1ª classe σ_1 (e corrispondente famiglia). Per es. i tre sistemi minimi speciali di 2ª classe (**):

$$[a^4 b_1^2 b_2^2]_{\mu=7}, \quad [a^5 b^3 c^2]_{\mu=8}, \quad [a^6 b_1^3 b_2^3]_{\mu=9}$$

sono associati rispettivamente ai sistemi generali minimi di 1ª classe:

$$[a^3 b_1 b_2]_{\mu=6}, \quad [a^3 b]_{\mu=6}, \quad [a^3]_{\mu=6};$$

ma tutt'e tre sono associati all'unico *tipo normale* $[a^3]_{\mu=6}^{p=7}$.

(*) l. c. t. XV, p. 279 e t. XVI, p. 295.

(**) Oltre ai sistemi minimi di curve iperellittiche, son questi i soli sistemi minimi della 2ª classe pel genere $p = 7$; cfr. l. c. t. XVI, pag. 318.

6. Qualsivoglia famiglia di sistemi lineari speciali (tanto della 1ª che della 2ª classe) è così associata a *una* famiglia di sistemi lineari generali (epperò necessariamente della 1ª classe); invece a una stessa famiglia generale di 1ª classe può essere associato un *gruppo* di m famiglie speciali delle due classi. Sicchè in altri termini riassumendo si può dire:

a) *Ogni sistema minimo* (sia della 1ª o della 2ª classe, abbia i punti base distinti o infinitamente vicini) *individua e rappresenta tutta una famiglia di sistemi lineari deducibili l'un dall'altro per trasformazioni cremoniane*;

b) *Ogni sistema minimo generale* (cioè di minimo ordine, della 1ª classe e a punti base distinti) *individua la famiglia di sistemi generali ch'esso rappresenta, e determina inoltre un intero gruppo di famiglie (speciali) associate alla famiglia (generale) predetta*;

c) *Ogni tipo normale di* 1ª *classe* (sistema minimo generale a punti base distinti e *senza* punti base semplici) *rappresenta in pari tempo la famiglia generale da esso individuata e le famiglie generali individuate dai suoi* tipi derivati (l. c. t. XV, § 4, p. 288), *nonchè tutti i gruppi* (*di famiglie speciali*) *associati alle predette famiglie.*

Un sistema generale e un sistema del gruppo associato, mai sono deducibili l'un dall'altro mediante trasformazioni cremoniane; nè lo sono generalmente due sistemi presi ad arbitrio nel gruppo. *Il passaggio dalla famiglia generale alle speciali del gruppo associato si effettua invece per tutt'altra via*: cioè mediante la deformazione di un determinato sistema di quella famiglia, il quale per l'avvicinamento indefinito dei suoi punti base ordinari, venga a coincidere col sistema speciale di minimo ordine che individua una delle famiglie del gruppo.

7. Per dare un esempio consideriamo i sistemi lineari di *minimo* ordine μ dotati di un punto base $(\mu - 2)$-plo. Ho mostrato altrove [l. c. t. XV: tab. I, sist. *c*; tab. II, sist. *c* per $s = 2$; t. XVI, p. 306 (p) e p. 307] che per ogni genere $p > 1$ la totalità di siffatti sistemi minimi è data dai seguenti *tipi normali* [nei quali si prescinde affatto dai punti base semplici che eventualmente si possono aggiungere; e nei tipi

(b) inoltre si suppone che i punti doppi b_i siano tutti infinitamente vicini al punto base a](*):

$$\left.\begin{array}{l} [a^{p}]_{\mu=p+2};\ [a^{p+1}\,b^{2}]_{\mu=p+3}\ \ldots\ldots\ldots\ (a) \\ \left.\begin{array}{l} [a^{p+1}\,b^{2}]_{\mu=p+3} \\ [a^{p+2}\,b_1^{2}\,b_2^{2}]_{\mu=p+4} \\ [a^{p+3}\,b_1^{2}\,b_2^{2}\,b_3^{2}]_{\mu=p+5} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [a^{2p-1}\,b_1^{2}\ \ldots\ b_{p-1}^{2}]_{\mu=2p+1} \\ [a^{2p}\,b_1^{2}\,b_2^{2}\ \ldots\ b_p^{2}]_{\mu=2p+2}; \end{array}\right\}\ \ldots\ (b) \end{array}\right\}\ (I)$$

i due tipi normali (a) sono sistemi generali di 1ª classe, il primo dei tipi (b) è speciale di 1ª classe, gli altri sono di 2ª classe e perciò speciali. Per ciascuno dei $p + 2$ tipi (I) il grado del sistema (ossia il numero D delle intersezioni variabili di due sue curve arbitrarie) è $= 4p + 4$ e la dimensiene $= 3p + 5$. Inoltre, per quanto ho detto precedentemente, si riconosce subito che alla famiglia individuata dal sistema generale di minimo ordine $[a^p]_{p+2}$ è associato il gruppo che comprende le famiglie di sistemi speciali rappresentate dai tipi (b) di posto pari (cioè dal 2°, 4°, 6°, ...); e a quella individuata dal sistema generale minimo $[a^{p+1}\,b^2]_{p+3}$ è associato il gruppo che comprende le famiglie di sistemi speciali rappresentate dai tipi (b) di posto dispari (cioè dal 1°, 3°, 5°, ...). Sicchè, se p è pari, ciascuno dei due gruppi contiene $\frac{p}{2}$ famiglie; se p è dispari, quel grupppo ne contiene $\frac{p-1}{2}$, questo $\frac{p+1}{2}$.

(*) Questi tipi normali dànno anche la totalità dei sistemi lineari *minimi* di curve iperellittiche di grado $D > 2p$, perchè *un sistema lineare di curve iperellittiche, nel quale il passaggio di una curva per un punto arbitrario non porti di conseguenza il passaggio per altri punti determinati dal primo, può ridursi mediante una trasformazione birazionale a un sistema di curve di un certo ordine μ aventi in comune un punto multiplo secondo $\mu - 2$ (e forse altri punti base semplici e doppi).* Questo teorema che trovasi dimostrato nella Memoria: *Sulle superficie ecc.* del sig. Castelnuovo (l. c. pag. 81) si può stabilire facilmente con considerazioni non estranee ai sistemi lineari e mi consta infatti che lo stesso sig. Castelnuovo, in un lavoro ancora inedito, ne ha dato un'altra dimostrazione diretta.

8. Col concetto qui introdotto dei *sistemi minimi associati* e delle *famiglie associate*, l'inconveniente sopra accennato (n° 5) pare eliminato senza dar luogo a inconvenienti maggiori, e la correlazione di cui più su parlavo pare più nettamente messa in rilievo. Invero, esclusi i sistemi lineari non rappresentativi di superficie:

1° *a ogni tipo normale di prima classe* (e relativa famiglia di sistemi lineari generali) *corrisponderebbe una superficie* GENERALE F *di ordine* D;

2° *ai suoi tipi derivati* (e relative famiglie di sistemi lineari generali) *corrisponderebbero superficie* DERIVATE F' *di ordine* $< D$ (l. c, t. XVI, p. 320, comma 2°): superficie generali anch'esse sotto un certo aspetto ma aventi con la F uno stretto legame, sicchè da quest'una possono tutte derivarsi con semplici operazioni;

3° *le famiglie (speciali) dei gruppi associati al tipo normale e ai suoi derivati*, *rappresenterebbero invece superficie* SPECIALI: speciali nel senso ch'esse possono riguardarsi come particolarizzazioni rispettivamente della superficie generale F e delle superficie derivate F'.

9. Così, riprendendo l'esempio di poc'anzi, quando si osservi che i sistemi (I), perchè $D > 2p$ (*), son veramente rappresentativi di superficie (dell'ordine $D = 4p + 4$), da quanto precede risulta immediatamene che *esistono due specie (e due sole:* cfr. nota al n° 7) *di superficie generali* F_{4p+4} *a sezioni iperellittiche di genere* $p > 1$, *univocamente rappresentabili sul piano, nelle quali (prescindendo dalle superficie derivate) rientrano come casi particolari* p *altre superficie speciali.* (**) *Ciascuna di queste* $p + 2$ F_{4p+4} *contiene* ∞^1 *coniche* γ *aventi per imagini le* ∞^1 *rette del fascio* c, *sicchè per ogni punto della superficie ne passa una e una sola.* — Invece di leggere nella loro rappresentazione piana queste ed altre (***) proprietà delle superficie a sezioni iperellitti-

(*) v. Segre, *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere* p (in questi Rendiconti, t. I. pag. 219).

(**) Nella memoria *Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte* $p = 0$ (Math. Ann., t. V) Clebsch ha analogamente fondata la classificazione delle rigate razionali sulla loro rappresentazione piana.

(***) Per es: la $F_{4p+4} \equiv [a^p]_{\mu=p+2}$, oltre alla curva α_p (di ordine p) corrispondente al punto base a e avente perciò un sol punto comune con ogni conica γ, contiene le ∞^2 curve k_{p+2} (di ordine $p + 2$) che corrispondono alle rette del piano rap-

che, si potrebbe ricavarle dallo studio diretto delle superficie medesime; in tal caso, assegnandone le rappresentazioni di minimo ordine, se ne dedurrebbero senz'altro per $p > 1$ tutti i sistemi (I) (*).

10. Così il problema: *Individuata una famiglia di sistemi lineari mediante un dato sistema generale minimo di prima classa σ_1, esaminare se in essa esistono sistemi che, per effetto dell' indefinito avvicinamento dei punti base, non siano riducibili al tipo σ_1; e, se esistono, assegnarli*

e il problema: *Data una superficie (irriduttibile) generale F_D a sezioni piane di genere p e rappresentabile punto per punto sul piano, determinare le superficie (irriduttibili) dell'ordine D che nel senso sopra definito ne sono casi particolari,*

sono equivalenti; e l'uno e l'altro dipendono in sostanza dalla ricerca dei sistemi lineari minimi della 2ª classe e di quelli speciali della 1ª classe, appartenenti al genere p, e sono implicitamente trattati nella seconda mia Memoria (l. c., t. XVI), che appunto quella ricerca aveva per oggetto.

Non so se la presente Nota, dando maggior risalto al legame esistente fra la teorica dei sistemi lineari di curve algebriche e quella delle superficie univocamente rappresentabili sul piano, sia riuscita a mettere vieppiù in luce i vantaggi che le due teoriche possono scambievolmente prestarsi, in questioni riferentisi a ciascuna di esse; se fosse, avrebbe pienamente raggiunto il suo scopo.

Milano, aprile 1890.

G. JUNG.

---

presentativo: e perciò si segano a due a due in un punto, hanno ciascuna con ogni conica γ un punto comune e non incontrano la α_p; — la $F_{4p+4} \equiv [a^{p+1} b^2]_{\mu = p+3}$ contiene ∞^1 curve k_{p+1} (di ordine $p+1$) e ∞^3 curve g_{p+3} (di ordine $p+3$) corrispondenti risp. alle ∞^1 rette del fascio b e alle ∞^3 coniche del piano rappresentativo passanti per a, b; sicchè le k_{p+1} non si segano fra loro, ma incontrano in *un* punto ogni γ, e per ogni punto della superficie ne passa una sola; mentre le g_{p+3} sono individuate ciascuna da tre punti arbitrari della superficie, si segano a due a due in coppie di punti, hanno con ogni conica γ e con ogni curva k_{p+1} risp. un sol punto comune. Dalla serie ∞^3 di g_{p+3} si staccano le ∞^2 curve d'ordine $p+3$ che corrispondono alle rette del piano objettivo; di questa serie ∞^2 fanno parte e le ∞^1 curve k_{p+1} e le ∞^1 coniche γ; — ecc. ecc. ecc.

(*) È ciò che nella citata Memoria ha fatto il sig. Castelnuovo, il quale così ha per via indiretta ritrovato e confermato che *la totalità dei sistemi di minimo ordine μ dotati di un punto base $(\mu-2)$-plo è data appunto da quei tipi normali (I).*

ALCUNE FORMOLE RELATIVE ALL'OPERAZIONE Ω.

Nota di **Giulio Vivanti**, in Mantova.

Adunanza del 13 luglio 1890.

1. Se $x_{11}, \ldots, x_{1n}; x_{21}, \ldots, x_{2n}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nn}$ sono n serie di n variabili ciascuna, l'operazione Ω rispetto a queste variabili è definita dall' espressione:

$$\Omega = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_{11} \partial x_{22} \ldots \partial x_{nn}}, \tag{α}$$

dove i gruppi di n variabili che figurano nei vari termini del secondo membro sono i sommandi del determinante:

$$(x_{11} x_{22} \ldots x_{nn}) \tag{β}$$

e il segno di ciascun termine è quello che ha il sommando corrispondente del determinante (β).

La (α) può anche scriversi simbolicamente (*):

$$\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial x_{11}} \frac{\partial}{\partial x_{22}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{nn}}\right),$$

convenendo che il prodotto simbolico $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ rappresenti l'operazione effettiva $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

(*) Cfr. Gordan, *Invariantentheorie* t. II. p. 15.

In qualche caso è opportuno mettere in evidenza il numero delle serie di variabili che figurano in Ω, ed anche le variabili stesse; allora invece di Ω si scriverà $\Omega^{(n)}_{(x_{11}\dots x_{nn})}$. Per uniformità potrà porsi $\Omega^{(0)}\varphi = \varphi$.

2. Vogliamo determinare l'effetto dell'operazione Ω sopra un prodotto di più fattori.

Cominciamo dal caso più semplice, quello in cui i fattori sono 2, e la Ω contiene due sole serie di variabili. Si trova allora:

$$\Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}(\varphi\psi) = \frac{\partial}{\partial x_{11}\partial x_{22}}(\varphi\psi) - \frac{\partial}{\partial x_{12}\partial x_{21}}(\varphi\psi) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{11}\partial x_{22}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{12}\partial x_{21}}\right)\psi$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_{11}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{22}} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_{12}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{21}} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_{21}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{12}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{22}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{11}} + \varphi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{11}\partial x_{22}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_{12}\partial x_{21}}\right)$$

$$= \Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}\varphi.\Omega^{(0)}\psi + \Omega^{(1)}_{(x_{11})}\varphi.\Omega^{(1)}_{(x_{22})}\psi - \Omega^{(1)}_{(x_{12})}\varphi.\Omega^{(1)}_{(x_{21})}\psi - \Omega^{(1)}_{(x_{21})}\varphi.\Omega^{(1)}_{(x_{12})}\psi$$

$$+ \Omega^{(1)}_{(x_{22})}\varphi.\Omega^{(1)}_{(x_{11})}\psi + \Omega^{(0)}\varphi.\Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}\psi = \Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}\varphi.\Omega^{(0)}\psi$$

$$+ \sum \pm \Omega^{(1)}\varphi.\Omega^{(1)}\psi + \Omega^{(0)}\varphi.\Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}\psi,$$

dove nei vari termini della somma $\sum \pm \Omega^{(1)}\varphi.\Omega^{(1)}\psi$ devono porsi come indici delle due Ω i due fattori dei vari sommandi del determinante $(x_{11}x_{22})$ e ciò in tutti i modi possibili, e a ciascun termine deve darsi lo stesso segno che ha il corrispondente sommando del determinante.

Più brevemente può scriversi:

$$\Omega^{(2)}_{(x_{11}x_{22})}(\varphi.\psi) = \sum_{n_1+n_2=2} \sum \pm \Omega^{(n_1)}\varphi.\Omega^{(n_2)}\psi, \qquad (\gamma)$$

dove la somma esterna si estende a tutte le partizioni del numero 2 in due sommandi non negativi.

3. Dalla (γ) si può indurre la seguente formola generale:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\dots x_{nn})}(\varphi_1.\varphi_2\dots\varphi_r) = \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \sum \pm \Omega^{(n_1)}\varphi_1.\ \dots\ \Omega^{(n_r)}\varphi_r. \qquad (\delta)$$

La somma esterna è estesa a tutte le diverse partizioni (tenuto anche conto dell'ordine) del numero n in r sommandi non negativi. A ci-

scuna partizione corrisponde poi un certo numero di termini, rappresentati dalla somma $\sum \pm \Omega^{(n_1)}\varphi_1 \ldots \Omega^{(n_r)}\varphi_r$, i quali si ottengono nel modo seguente (*). Si distribuiscano gli n numeri $1, 2, \ldots, n$ in r gruppi di $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementi; se:

$$\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n_1}; \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n_2}; \ldots; \alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rn_r},$$

$$\beta_{11}, \ldots, \beta_{1n_1}; \beta_{21}, \ldots, \beta_{2n_2}; \ldots; \beta_{r1}, \ldots, \beta_{rn_r}$$

sono due distribuzioni, identiche o no,

$$\Omega^{(n_1)}_{(x_{\alpha_{11}\beta_{11}}\ldots x_{\alpha_{1n_1}\beta_{1n_1}})}\varphi_1 \; \Omega^{(n_2)}_{(x_{\alpha_{21}\beta_{21}}\ldots x_{\alpha_{2n_2}\beta_{2n_2}})}\varphi_2 \ldots \Omega^{(n_r)}_{(x_{\alpha_{r1}\beta_{r1}}\ldots x_{\alpha_{rn_r}\beta_{rn_r}})}\varphi_r$$

sarà uno dei termini cercati, e il suo segno sarà quello del sommando

$$x_{\alpha_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\alpha_{1n_1}\beta_{1n_1}} x_{\alpha_{21}\beta_{21}} \ldots x_{\alpha_{2n_2}\beta_{2n_2}} \ldots x_{\alpha_{r1}\beta_{r1}} \ldots x_{\alpha_{rn_r}\beta_{rn_r}}$$

del determinante (β).

Siccome il numero delle distribuzioni di n elementi in r gruppi di $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementi è $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$, il numero dei termini del secondo membro della (δ) sarà:

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}\right)^2.$$

4. Dimostreremo la formola (δ) col metodo dell'induzione completa. Perciò faremo vedere:

a) Che, se essa è vera per l'operazione Ω ad n indici eseguita sopra un prodotto di 2 fattori, lo è pure per l'operazione Ω ad $n+1$ indici eseguita sullo stesso prodotto;

b) Che, se essa è vera per l'operazione Ω eseguita sopra un prodotto di r fattori, lo è pure per la stessa operazione eseguita sopra un prodotto di $r+1$ fattori.

(*) Si potrebbe procedere come nel caso di $n = 2$, ma si otterrebbero così dei termini ripetuti più volte.

5. *a*) A ciascuna delle n serie di variabili considerate si aggiunga una nuova variabile $x_{i,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; inoltre s'introduca una nuova serie di $n + 1$ variabili $x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n+1}$. Si avrà:

$$\Omega^{(n+1)}_{(x_{11}\ldots x_{n+1,n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{ni} \frac{\partial}{\partial x_{n+1,i}} \Omega^{(n)}_{(x_{1,i+1} x_{2,i+2} \ldots x_{n-i+1,n+1} x_{n-i+2,1} \ldots x_{n,i-1})} . \quad (\varepsilon)$$

Si scriva ora la (δ) per $r = 2$ successivamente rispetto agli $n+1$ gruppi di n^2 variabili che si ottengono sopprimendo ciascuna volta una colonna della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1,n+1} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{n,n+1} \end{matrix} \right\| ;$$

sulle $n + 1$ equazioni così ottenute si eseguiscano rispettivamente le operazioni $\frac{\partial}{\partial x_{n+1,1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n+1,2}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1,n+1}}$, si sommino i risultati, e si applichi tanto al primo membro che al secondo della somma la relazione (ε). È facile vedere che s'ottiene così la (δ) rispetto alle $(n+1)^2$ variabili x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n + 1;\ j = 1, 2, \ldots, n + 1)$.

In via di verifica calcoliamo il numero t dei termini del secondo membro dell'equazione ottenuta. Il 2° membro della (δ) consta, per $r = 2$, di $\sum_{n_1+n_2=n} \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2!}\right)^2$ ossia di $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$ termini. Le $n + 1$ derivazioni eseguite sul primo fattore dei singoli termini $\Omega^{(p)}\varphi_1\, \Omega^{(n-p)}\varphi_2$ dànno origine ad $(n + 1)\binom{n}{p}^2$ termini, i quali raggruppandosi a $p + 1$ a $p + 1$ vanno a costituire $\frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}^2$ termini della forma

$$\Omega^{(p+1)}\varphi_1 . \Omega^{(n-p)}\varphi_2 .$$

Parimenti le derivazioni eseguite sul secondo fattore dei termini considerati dànno luogo ad $\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}^2$ termini della forma:

$$\Omega^{(p)}\varphi_1 . \Omega^{(n-p+1)}\varphi_2 .$$

Sarà dunque:

$$t=\sum_{p=0}^{n}\left\{\frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}^2+\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}^2\right\}=\sum_{p=1}^{n+1}\left\{\frac{n+1}{p}\binom{n}{p-1}^2\right\}+\sum_{p=0}^{n}\left\{\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}^2\right\}$$

$$=\binom{n}{0}^2+\sum_{p=1}^{n}\left\{\frac{n+1}{p}\binom{n}{p-1}^2+\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}^2\right\}+\binom{n}{n}^2;$$

ora $\frac{1}{n-p+1}\binom{n}{p}=\frac{1}{p}\binom{n}{p-1}$, $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$,

quindi:

$$\frac{n+1}{p}\binom{n}{p-1}^2+\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}^2=\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}\left\{\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}\right\}$$

$$=\frac{n+1}{n-p+1}\binom{n}{p}\binom{n+1}{p}=\binom{n+1}{p}^2,$$

inoltre $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}$, sicchè sarà:

$$t=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}^2.$$

6. b) Anche il passaggio da r ad $r+1$ fattori si effettua senza alcuna difficoltà. Basta nella formola (δ) invece di φ_r porre $\varphi_r\varphi_{r+1}$, e poi a ciascuna delle $\Omega(\varphi_r.\varphi_{r+1})$ che figurano nel 2° membro sostituire la sua espressione data dalla formola stessa.

Qui pure a titolo di verifica calcoleremo il nnmero t_1 dei termini risultanti. Se sui vari termini $\Omega^{(n_1)}\varphi_1.\Omega^{(n_2)}\varphi_2.\ \ldots\ \Omega^{(n_r)}\varphi_r$ eseguiamo le operazioni testè indicate, siccome $\Omega^{(n_r)}(\varphi_r.\varphi_{r+1})$ consta di $\sum_{p=0}^{n_r}\binom{n_r}{p}^2$ termini, avremo:

$$=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\left(\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}\right)^2\sum_{p=0}^{n}\binom{n_r}{p}^2=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=n\\ p=0,1,\ldots,n}}\left(\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_{r-1}!p!n_r-p!}\right)^2,$$

che può anche scriversi:

$$t_1=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{r+1}=n}\left(\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_{r+1}!}\right)^2.$$

7. Il seguente lemma della teoria dei determinanti si dimostra senza alcuna difficoltà ricorrendo al metodo dell'induzione completa:

Se si hanno $(n+m)^2$ variabili $x_{ij}\,(i=1,\ldots,n+m;\, j=1,\ldots,n+m)$, e se le α, β hanno lo stesso significato attribuito ad esse nel n° 3, si ha:

$$\sum \pm (x_{\alpha_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\alpha_{1n_1}\beta_{1n_1}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m})$$

$$\times (x_{\alpha_{21}\beta_{21}} \ldots x_{\alpha_{2n_2}\beta_{2n_2}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}) \ldots (x_{\alpha_{r1}\beta_{r1}} \ldots x_{\alpha_{rn_r}\beta_{rn_r}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m})$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} (x_{11} \ldots x_{n+m,n+m})(x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m})^{r-1}, \quad (\zeta)$$

dove il segno di ciascun termine è determinato dalla stessa regola che nel n° 3.

8. Mediante questo lemma può dimostrarsi la seguente equazione:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}(x_{11} \ldots x_{n+m,n+m})^s = \frac{s+n-1!}{s-1!} (x_{11} \ldots x_{n+m,n+m})^{s-1} (x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}). \quad (\eta)$$

Consideriamo anzitutto il caso di $s=1$. Si ha:

$$(x_{11} \ldots x_{n+m,n+m}) = (x_{11} \ldots x_{nn})(x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}) + \sum (x_{1\alpha_1} \ldots x_{n\alpha_n})(x_{n+1,\alpha_{n+1}} \ldots x_{n+m,\alpha_{n+m}}),$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+m}$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n+m$, e fra i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ve n'ha uno almeno diverso da $1, 2, \ldots n$. Eseguiamo sul 2° membro l'operazione $\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}$. Il 2° fattore di ciascun termine non contiene alcuna delle variabili che figurano in Ω, sicchè rispetto a questa operazione esso si comporta come una costante. Inoltre, se i è un numero $\leqq n$ che non figura nella serie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, siccome ciascun termine di Ω contiene una derivazione rispetto ad una variabile avente per primo indice uno dei numeri $1, 2, \ldots, n$ e per secondo indice i, è chiaro che sarà:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}(x_{1\alpha_1} \ldots x_{n\alpha_n}) = 0.$$

Resta dunque:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}(x_{11} \ldots x_{n+m,n+m}) = (x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m})\, \Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}(x_{11} \ldots x_{nn}).$$

Calcoliamo ora $\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})}(x_{11} \ldots x_{nn})$. Se si considera un termine di

Ω, p.es. $\dfrac{\partial}{\partial x_{1\beta_1} \ldots \partial x_{n\beta_n}}$, dove $\beta_1 . \beta_2 \ldots . \beta_n$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n$, è facile persuadersi che eseguendo la derivazione da esso rappresentata sui diversi termini di $(x_{11} \ldots x_{nn})$ si ha per risultato o, fatta eccezione pel termine $x_{1\beta_1} \ldots x_{n\beta_n}$, che dà 1. Ora i termini $\dfrac{\partial}{\partial x_{1\beta_1} \ldots \partial x_{n\beta_n}}$ e $x_{1\beta_1} \ldots x_{n\beta_n}$ figurano collo stesso segno rispettivamente negli sviluppi di Ω e di $(x_{11} \ldots x_{nn})$, quindi indicando con ε il loro segno comune sarà:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{1\beta_1} \ldots \partial x_{n\beta_n}} (x_{11} \ldots x_{nn}) = \varepsilon \frac{\partial [\varepsilon x_{1\beta_1} \ldots x_{n\beta_n}]}{\partial x_{1\beta_1} \ldots \partial x_{n\beta_n}} = 1 \ (*),$$

e per conseguenza:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11} \ldots x_{nn})} (x_{11} \ldots x_{nn}) = n!,$$

da cui finalmente:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11} \ldots x_{nn})} (x_{11} \ldots x_{n+m,n+m}) = n! \ (x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}).$$

9. Dimostrata così vera la formola (η) per $s = 1$, basterà far vedere che se essa sussiste per l'esponente $s - 1$ sussiste pure per lo esponente s.

Poniamo per brevità:

$$(x_{11} \ldots x_{n+m,n+m}) = P, \quad (x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}) = Q.$$

Per la (δ) avremo:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11} \ldots x_{nn})} P^s = \Omega^{(n)}_{(x_{11} \ldots x_{nn})} (P^{s-1} . P) = \sum_{n_1 + n_2 = n} \sum \pm \Omega^{(n_1)} P^{s-1} . \Omega^{(n_2)} P.$$

Consideriamo un termine del 2° membro, p.es.:

$$\Omega^{(n_1)}_{(x_{\alpha_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\alpha_{1n_1}\beta_{1n_1}})} P^{s-1} . \Omega_{(x_{\alpha_{21}\beta_{21}} \ldots x_{\alpha_{2n_2}\beta_{2n_2}})} P.$$

Siccome supponiamo l'equazione (η) vera per tutti gli esponenti minori di s, sarà:

$$\Omega^{(n_1)}_{(x_{\alpha_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\alpha_{1n_1}\beta_{1n_1}})} P^{s-1} = \frac{s + n_1 - 2!}{s - 2!} P^{s-2} . (x_{\alpha_{21}\beta_{21}} \ldots x_{\alpha_{2n_2}\beta_{2n_2}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}),$$

(*) Si sono messe le parentesi quadre per indicare che qui si tratta d'un prodotto effettivo e non d'un determinante.

$$\Omega^{(n_2)}_{(x_{21\beta_{21}}\ldots x_{2n_2\beta_{2n_2}})} P = n_2!\,(x_{\beta_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\beta_{1n_1}\beta_{1n_1}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}),$$

quindi:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})} P^s = P^{s-2} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n_2!\,s+n_1-2!}{s-2!}$$

$$\times \sum \pm (x_{\beta_{11}\beta_{11}} \ldots x_{\beta_{1n_1}\beta_{1n_1}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m})(x_{\beta_{21}\beta_{21}} \ldots x_{\beta_{2n_2}\beta_{2n_2}} x_{n+1,n+1} \ldots x_{n+m,n+m}),$$

e per la (ζ):

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})} P^s = P^{s-2}\, Q \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n_2!\; s+n_1-2!}{s-2!} \frac{n!}{n_1!\; n_2!}.$$

Denotando con S la somma che figura nel 2' membro, può scriversi:

$$S = \sum_{p=0}^{n} \frac{s+n-p-2!\,n!}{s-2!\,n-p!}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (s-1).s(s+1)\ldots(s+n-p-2).(n-p+1)(n-p+2)\ldots n,$$

donde si ha:

$$\frac{S}{(s-1)s(s+1)\ldots(s+n-2)} = 1 + \frac{n}{s+n-2} + \frac{n(n-1)}{(s+n-2)(s+n-3)}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(s+n-2)(s+n-3).\ s(s-1)} = F(1, -n, -s-n+2, 1),$$

F designando come di solito la serie ipergeometrica. Ora si ha, come è noto:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

e quindi per $\alpha = 1$, in virtù della relazione $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$:

$$F(1, \beta, \gamma, 1) = \frac{\gamma-1}{\gamma-\beta-1} = \frac{1-\gamma}{1+\beta-\gamma}.$$

Di qui segue nel caso nostro:

$$F(1, -n, -s-n+2, 1) = \frac{s+n-1}{s-1},$$

quindi:

$$S = s(s+1)\ldots(s+n-1) = \frac{s+n-1!}{s-1!},$$

e finalmente:

$$\Omega^{(n)}_{(x_{11}\ldots x_{nn})} P^s = \frac{s+n-1!}{s-1!} P^{s-1}\, Q,$$

come si doveva dimostrare.

Mantova, 25 giugno 1890.

GIULIO VIVANTI.

SOPRA UN CASO GENERALE DI COMPENSAZIONE ANGOLARE;

Nota del prof. **A. Venturi**, in Palermo.

Adunanza del 22 giugno 1890.

1. Consideriamo un punto O attorno al quale sieno gli altri punti $1, 2, \ldots n$; si misurino da O gli angoli che nascono dal combinare fra loro due a due in tutti i modi possibili gli n punti; si dica (rs) l'angolo frai punti r ed s; si indichi con $p_{r,s}$ il numero di volte che (rs) è stato misurato, e si esprima, infine, con $(rs)_i$ l'i-esima misura di (rs), di talchè i varia fra o e $p_{r,s}$.

Prendiamo come incognite della compensazione n direzioni teoriche da O a ciascuno degli n punti dati, e diciamole $l_1, l_2, \ldots l_n$. Gli angoli teorici essendo allora

$$l_2 - l_1, \; l_3 - l_1 \ldots$$

ne seguirà che l'equazione degli errori avrà la seguente forma generale:

$$\Delta^i_{r,s} = l_r - l_s - (rs)_i \qquad (1)$$

essendo $\Delta^i_{r,s}$ l'errore teorico commesso nella misura $(rs)_i$. Se ora, per comodità, si prendono dei valori (l_1), (l_2), ... tali che le loro differenze prese convenientemente, differiscano poco dagli angoli osservati, potremo porre

$$l_1 = (l_1) + A_1, \; l_2 = (l_2) + A_2, \; \ldots \; l_n = (l_n) + A_n \qquad (2)$$

ove le A son quantità da determinarsi nel modo più probabile. Sostituendo le (2) in (1), viene:

$$\Delta^i_{r,s} = A_r - A_s + (l_r) - (l_s) - (rs)_i, \tag{3}$$

e, se si pone:

$$[rs]_i = (l_r) - (l_s) - (rs)_i, \tag{4}$$

sarà $[rs]_i$ la differenza nota fra il cosidetto *angolo arrotondato* e l'angolo osservato; e la (3) diverrà definitivamente:

$$\Delta^i_{r,s} = A_r - A_s + [rs]_i. \tag{5}$$

Da questa si hanno le equazioni di tutti gli errori, facendo variare r, s in tutti i modi possibili, e per ogni combinazione, variando i da o a $p_{r,s}$. Il caso più generale sarà che esistano tutte le combinazioni binarie, ma ciascuna un numero diverso di volte: se manca qualcuna di esse combinazioni, basterà fare $= 0$ il p corrispondente, nelle formule generali.

2. Si ponga ora:

$$[rs] = [rs]_1 + [rs]_2 + \dots;$$

sarà, in forza della (4):

$$[r, s] = p_{r,s}\{(l_r) - (l_s)\} - \sum (rs)_i.$$

Ciò posto, venendo a formare le equazioni normali che debbono determinare le A, si giunge, con un pò di pazienza, al sistema:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} 0 = [p_{n,1} + p_{n,2} + \dots + p_{n,n-1}]A_n - p_{n,n-1}A_{n-1} - \dots - p_{n,1}A_1 + \{[n,1] + [n,2]\,.\,.+[n,n- \\ 0 = -p_{n,n-1}A_n + [p_{n-1,1} + p_{n-1,2} + \dots + p_{n,n-1}]A_{n-1} - \dots - p_{n-1,1}A_1 + \\ \qquad \{[n-1,1] + [n-1,2] \dots - [n,n-1]\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = -p_{n,1}A_n - p_{n-1,1}A_{n-1} - \dots + [p_{n,1} + p_{n-1,1} \cdots p_{2,1}]A_1 + \{-[n,1] - [n-1,1] \dots - [2 \end{array}\right.$$

Questo sistema così scritto può sembrare molto complicato e poco opportuno per le applicazioni. Invece la legge di formazione delle singole equazioni è semplicissima e simmetrica. Si scriva infatti lo schema seguente:

$$\begin{array}{llllll}
 & -p_{n,n-1} & -p_{n,n-2} & \ldots & -p_{n,2} & -p_{n,1} \\
-p_{n,n-1} & & -p_{n-1,n-2} & \ldots & -p_{n-1,2} & -p_{n-1,1} \\
-p_{n,n-2} & -p_{n-1,n-2} & & \ldots & -p_{n-2,2} & -p_{n-2,1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-p_{n,2} & -p_{n-1,2}\, p_{2,1} & & \ldots & & -p_{2,1} \\
-p_{n,1} & -p_{n-1,1}\, p_{n-2,1} & & \ldots & -p_{2,1} &
\end{array}$$

che è simmetrico; si lasci vuota la diagonale. Per formare i termini di questa, si usi la seguente legge: il termine della diagonale che si dee trovare sopra una data linea, risulta dalla somma degli elementi scritti in questa, presi col segno contrario. Formata così la diagonale, avremo una matrice completa: i termini delle linee sono i coefficienti di A_n, A_{n-1} ... A_1 nelle equazioni normali (6).

Per formare i termini noti delle (6), si formi l'altro schema perfettamente analogo al precedente:

$$\begin{array}{llllll}
 & [n, n-1] & [n, n-2] & \ldots & [n,2] & [n, 1] \\
-[n, n-1] & & [n-1, n-2] & \ldots & [n-1, 2] & [n-1, 1] \\
-[n, n-2] & -[n-1, n-2] & & \ldots & [n-2, 2] & [n-2, 1] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-[n, 2] & -[n-1, 2] & -[n-2, 2] & \ldots & & [2, 1] \\
-[n, 1] & -[n-1, 1] & -[n-2, 1] & \ldots & -[2, 1] &
\end{array}$$

La somma dei termini di una stessa linea, coi segni che hanno, dà immediatamente i termini noti delle (6). Queste dunque si possono scrivere rapidamente.

3. Si osservi ora, che il sistema normale (6) è indeterminato. Se

infatti se ne sommano tutte le equazioni, tenendo presente la legge di formazione che abbiamo data, si trova

$$0 = 0.$$

Ciò è naturale, poichè nelle direzioni teoriche l_1, l_2 ... si è lasciata indeterminata l'origine. Per toglier l'indeterminazione, poniamo

$$A_1 = 0$$

e così verremo a fissare l'origine comune delle direzioni teoriche, giacchè la 1ª delle (2) diviene:

$$l_1 = (l_1)$$

e siccome (l_1) è nota e fissata, risulterà fissata la direzione al 1° punto e quindi quelle a tutti gli altri. Allora il sistema (6) si cambia nell'altro, che si ottiene facendo $A_1 = 0$ e sopprimendo l'ultima equazione omai inutile:

$$(7)\left\{\begin{array}{l} 0 = [p_{n,1} + p_{n,2} + \ldots + p_{n,n-1}]A_n - p_{n,n-1}A_{n-1} \ldots - p_{n,2}A_2 + \{[n,1] + [n,2] \ldots [n, n-1 \\ 0 = -p_{n,n-1}A_n + [p_{n-1,1} + \ldots + p_{n,n-1}]A_{n-1} \ldots - p_{n-1,2}A_2 + \\ \qquad + \{[n-1,1] + [n-1,2] \ldots - [n, n-1]\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = -p_{n,2}A_n - p_{n-1,2}A_{n-1} \ldots + [p_{n,2}p_{n-1,2} \ldots p_{2,1}]A_2 + \{-[n,2] - [n-1,2] \ldots + [2 \end{array}\right.$$

il quale è ora perfettamente determinato. Avute da questo le A, si avranno le direzioni compensate, dalle formule:

$$l_1 = (l_1),\ l_2 = (l_2) + A_2 \ldots l_n = (l_n) + A_n.$$

4. Se tutte le p sono uguali, allora l'indeterminazione del sistema (6) si può togliere in un altro modo, tale che il sistema determinato risulta semplicissimo. Ricadremo allora nelle formule di Schreiber che sono perciò un caso particolare delle nostre. Se, per brevità indichiamo con N_1, N_2 ... N_n i termini noti di (6), e si chiama p il valor co-

mune delle p_{rs}, lo stesso (6) diviene:

$$\begin{array}{r}(n-1)pA_n - pA_{n-1} - \ldots - pA_1 + N_1 = 0 \\ -pA_n + (n-1)pA_{n-1} - \ldots - pA_1 + N_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -pA_n - pA_{n-1} \ldots + (n-1)pA_1 + N_n = 0.\end{array}$$

Per toglier l'indeterminazione in questo caso, poniamo:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0$$

allora il precedente diviene:

$$npA_n + N_1 = 0,\ npA_{n-1} + N_2 = 0,\ npA_{n-2} + N_3 = 0 \ldots npA_1 + N_n = 0 \quad (8)$$

il quale ha tutte le incognite separate, ed è perciò di immediata risoluzione.

5. Per aver l'error medio di peso uno, si ha che facendo le $A = 0$ nella (5) e sommando, si ha l'espressione di $[vv]_0$ cioè

$$[vv]_0 = \Sigma[rs],$$

per tutte le combinazioni degli n numeri, e dando ad i tutti i valori che può prendere. Nel caso del n° precedente, applicando la formula generale degli scostamenti questa prende la forma:

$$[vv] = [vv]_0 - \frac{\Sigma N}{np}.$$

La formula dell'error medio, badando che il numero delle osservazioni è Σp_{rs}, e quella delle incognite è $n - 1$, giacchè una delle A è funzione delle altre, od è fissata, diviene in generale

$$M^2 = \frac{[vv]}{\Sigma p_{rs} - n + 1}. \quad (9)$$

Nel caso del n° precedente è chiaro che

$$\Sigma p_{rs} = p\,\frac{n(n-1)}{2},$$

quindi

$$M^2 = 2\,\frac{np\,\Sigma[rs]_i - \Sigma N}{np(n-1)(pn-2)} \tag{10}$$

per l'error medio unitario angolare. Se si vuole l'error medio di una direzione, siccome due direzioni entrano nella formazione di un angolo basterà divider per 2 la (9) o la (10), secondo i casi.

È facile poi vedere come, nel caso di Schreiber, il peso di una direzione compensata è

$$P = np$$

e s'intende che qui l'unità di peso è il peso d'un angolo; se si prende per unità di peso quello di una direzione, allora abbiamo:

$$P = \frac{1}{2}np.$$

Palermo, 22 giugno 1890.

A. VENTURI.

ESTRATTI DAI VERBALI.

[*Vedi* pag. 63-72].

Per le pubblicazioni periodiche e non periodiche ricevute in dono o in cambio dei Rendiconti e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte: *Biblioteca Matematica*.

ADUNANZA DEL 23 MARZO 1890. (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza.—La Società Matematica di Amburgo ringrazia per le felicitazioni del Circolo in occasione del 200° anniversario della sua fondazione. Annunzia il cambio regolare delle sue pubblicazioni coi Rendiconti del Circolo.

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazioni a schede segrete: il sig. Giovanni Monroy di Formosa, proposto dai soci Guccia e Porcelli, è eletto *socio residente;* il sig. Ing. Vincenzo Macrì (Casteltermini), proposto dai soci Gebbia ed Albeggiani (M. L.) ed il sig. Desiré André (Parigi), proposto dai soci Humbert e Guccia, sono eletti *soci non residenti.*

Il sig. Enrico Poincaré (Parigi) è eletto, per acclamazione, *socio non residente* del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

MOORE: *Note concerning a fundamental Theorem of elliptic Functions, as treated in Halphen's Traité, vol. I, pages 39-41.*

PINCHERLE: *Sulla trasformazione di Heine.*

HERMITE: *Sur les polynômes de Legendre.*

BAGNERA: *Sopra un teorema di Neumann.*

D'ARONE: *Osservazioni sulla Comunicazione precedente del sig. Bagnera.*

GIUDICE: *Osservazioni sulle serie.*

1. Molti si sono occupati delle irregolarità che può presentare la funzione della variabile intera n esprimente il rapporto d'un termine al precedente in una serie convergente a termini positivi. (Vedi p. es. *Math. Annalen*, 1889, **XXXV**$_3$, pag. 308). Credo tuttavia opportuno far conoscere il seguente modo semplice di costruire serie convergenti per le quali è infinitamente poco probabile che il rapporto tra un termine ed il successivo sia minore d'un numero dato innanzi arbitrariamente grande.

Mediante l'identità

$$\alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + \dots + (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}) + (\alpha - \alpha_{k-1})$$

si possono dire, in infiniti modi, k numeri tali che la loro somma sia il numero dato α ed il rapporto fra uno qualunque ed il precedente sia più grande che un altro numero dato H perchè facendo, p. es., $\alpha_\lambda = \alpha : A^{k-\lambda}$ si ha

$$\frac{\alpha_\lambda - \alpha_{\lambda-1}}{\alpha_{\lambda-1} - \alpha_{\lambda-2}} = A.$$

Ciò premesso, sia $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ una serie convergente a termini positivi. Si formino arbitrariamente le successioni di numeri positivi

$$k_1\, k_2\, k_3 \dots \qquad A_1\, A_2\, A_3 \dots$$

tali che sia

$$\lim_{n=\infty} k_n = \infty \qquad \lim A_n = \infty$$

e la prima contenga soli interi. Si determinino i numeri

$$v_1 \quad v_2 \dots v_{k_1} \quad v_{k_1+1} \quad v_{k_1+2} \dots v_{k_1+k_2} \quad v_{k_1+k_2+1} \dots$$

tali che sia

$$v_{k_1+k_2+\dots+k_{\lambda-1}+1} + \dots + v_{k_1+k_2+\dots+k_\lambda} = u_\lambda$$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} > A_\lambda \quad \text{per} \quad k_1 + k_2 + \dots + k_\lambda \geqq n > k_1 + k_2 + \dots + k_{\lambda-1} + 1.$$

La serie $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ è convergente, ha la stessa somma di Σu_n ed è infinitamente poco probabile che il rapporto $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ sia minore di un numero H dato innanzi arbitrariamente grande perchè ciò finisce per poter aver luogo solamente per i valori di n della forma

$$k_1 + k_2 + \dots + k_i + 1.$$

In modo simile si possono costruire serie divergenti per le quali è infinitamente poco probabile che il rapporto di un suo termine al precedente sia più grande che un numero dato innanzi arbitrariamente piccolo.

ADUNANZA DEL 13 APRILE 1890. (Presidenza G. Albeggiani).

Corrispondenza. — Il PRESIDENTE comunica una lettera ministeriale del 23 marzo u. s. con cui S. E. il Ministro della P. I., in seguito a parere favorevole della Giunta del Consiglio Superiore, ha concessa al Circolo la somma di lire 700 a titolo d'incoraggiamento alla pubblicazione dei *Rendiconti*. — I signori André e Poincaré ringraziano per la loro ammissione a soci del Circolo.—La Direzione dei *Monatshefte für Mathematik und Physik* aderisce al cambio coi *Rendiconti* del Circolo.

Ammissione di nuovi soci.—Il sig. Emilio Picard (Parigi) è eletto, per acclamazione, *socio non residente* del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

MAISANO: *Il combinante N della forma ternaria cubica.*

VIVANTI: *Sulle equazioni algebrico-differenziali del 1° ordine* (Nota II^a^).

GIUDICE: *Osservazioni sulle serie* (Continuazione).

2. Se

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \qquad \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \dots$$

sono serie a termini positivi, convergente la prima, divergente la seconda, è noto che $u_n \cdot v_n$ o tende al limite zero o non tende ad un limite. In quest'ultimo caso, se i termini della serie divergente non crescono mai, per quanto grandi si fissino gli interi positivi n' N e per quanto piccolo si fissi il numero positivo ε, si debbono sempre trovare dopo il termine $u_{n'}$ più di N termini consecutivi pei quali sussiste la

$$v_n u_n < \varepsilon$$

perchè se fosse, per i valori 1 2 3... di k,

$$v_{n_k} \cdot u_{n_k} \overline{\overline{>}} \varepsilon \qquad N > n_k - n_{k-1} > 0$$

si avrebbe:

$$u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3} + \ldots > \frac{\varepsilon}{N} \cdot \left(\frac{1}{v_{n_1}} + \frac{1}{v_{n_1+1}} + \frac{1}{v_{n_1+2}} + \ldots \right)$$

e la serie Σu_n non sarebbe convergente.

3. Quando il Dini considerò, la prima volta, le serie convergenti in egual grado semplicemente, la cui importanza pose in evidenza così nella derivazione come nella integrazione, non si conoscevano esempi di siffatte serie. (*Fondam. per la Teor. delle funz. di variabili reali* — a piè della pag. 103). Il Sig. Jules Tannery ha osservato. (*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, pag. 134) che la serie Σu_n con

$$u_{2n-1} = \frac{x}{n x^2 + (1 - n x)^2} \qquad u_{2n} = \frac{-x}{(n+1)x^2 + [1 - (n+1)x]^2}$$

è convergente in egual grado semplicemente nell'intervallo $(-1, 1)$. Mediante l'identità richiamata precedentemente si possono costruire di siffatte serie. La seguente osservazione permette anch'essa di costruire infiniti esempi di serie convergenti in egual grado semplicemente.

Se

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

sono due serie convergenti nell'intervallo (α, β), in egual grado la prima e neppure in egual grado semplicemente la seconda, posto

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \qquad \rho_n = v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots$$

è convergente in egual grado semplicemente, nell'intervallo (α, β), la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1} + (r_{n_1} - \rho_{n_1}) + v_{n_1+1} + \ldots + v_{n_1+n_2} + (\rho_{n_1+n_2} - r_{n_1+n_2})$$
$$+ u_{n_1+n_2+1} + \ldots + u_{n_1+n_2+n_3} + (r_{n_1+n_2+n_3} - \rho_{n_1+n_2+n_3}) + \ldots$$

come si riconosce osservando che essa serie si riduce subito alla

$$\sum_1^\infty {}_n u_n - \rho_{n_1} + \rho_{n_1} - r_{n_1+n_2} + r_{n_1+n_2} - \rho_{n_1+n_2+n_3} + \ldots = \Sigma u_n .$$

ADUNANZA DEL 27 APRILE 1890. (Presidenza G. B. G u c c i a).

Corrispondenza.—La Direzione della *Revue générale des sciences pures et appliquées* aderisce al cambio coi *Rendiconti* del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

GIUDICE: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi.*

Dopo che K u m m e r ha dato il suo importantissimo e generale criterio per le serie a termini positivi (*Crelle's Journal*, XIII, 1835), altri studii importanti sono stati fatti da distinti matematici ed ancora recentemente è comparsa una lunga memoria del sig. P r i n g s h e i m nella quale sono studiati e posti tra loro in confronto i criterii di convergenza e divergenza per le serie a termini positivi (*Math. Annalen*, XXXV$_3$, 1889) seguendo il D u B o i s R e y m o n d che l'ultimo anno decorso tolse alla scienza sebbene fosse troppo presto. Mi pare tuttavia che nessun nuovo criterio generale sia stato dato il quale si discostasse dai lavori già molto importanti di C a u c h y e di A b e l e da quello capitale di K u m m e r. Il criterio che ora comunicherò è forse degno di particolare considerazione per la sua generalità e specialmente per la mancanza di condizioni di limite per le funzioni che il criterio introduce.

TEOREMA. — *Perchè sia convergente la serie a termini positivi*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

è sufficente e necessario che si possa determinare la funzione a_n tale da aversi, per tutti i valori di n,

$$a_n > 0 \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\gtrless} a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

DIMOSTRAZIONE. — Se sono tutti positivi i numeri della successione infinita

$$a_1\ a_2\ a_3 \dots,$$

tende ad un limite finito, minore di 1, la quantità

$$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)},$$

epperò è convergente la serie

$$\left(1 - \frac{1}{1+a_1}\right) + \left(\frac{1}{1+a_1} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\right) + \dots,$$

ossia

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \dots$$

La sua somma è

$$1 - \lim_{n=\infty} \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}.$$

Indicando con v_n il termine n-mo di questa serie si ha

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

epperò, essendo convergente Σv_n, perchè sia convergente Σu_n è sufficiente che sia

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\overline{>}} a_n \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

ADUNANZA DELL'11 MAGGIO 1890. (Presidenza G. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

GIUDICE: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi* (Continuazione).

Questa condizione è anche necessaria perchè se è convergente la serie a termini positivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

e si pone

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

si ha

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n}{r_n} \cdot \left(1 + \frac{r_{n+1}}{u_{n+1}}\right)$$

cosicchè basta porre

$$a_n = \frac{u_n}{r_n}$$

per avere

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Si può anche osservare che se soddisfa una funzione a_n soddisfa ogni $a_n\,\lambda_n$ tale che sia

$$\lambda_n < 1 \qquad \lambda_n < \lambda_{n+1}.$$

Credo pure opportuno osservare che due criterii generali, di convergenza, debbono esser conseguenze l'uno dell'altro per cui il criterio presente deve essere una conseguenza dei criterii di convergenza di Kummer e Dini come questi debbono essere conseguenza di quello.

Dalla convergenza della serie considerata si possono dedurre varie conseguenze, p. es. che è $\lim\limits_{m=\infty} \sum\limits_{n}^{n+m} \frac{a_n}{(1 + a_{n+1}) \ldots (1 + a_{n+m})} = 0$, che se k è un intero dato arbitrariamente grande e ω_n è il termine generale d'una serie divergente, la quantità $\frac{\omega_n}{a_n} \cdot (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$ deve prendere valor maggiore di un numero prefissato arbitrariamente grande per infiniti valori di n maggiori di k. Il criterio che da essa abbiam dedotto permette di costruire serie convergenti nelle quali il rapporto $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ presenti irregolarità quante e quali si vuole.

Criterio particolare.—Col criterio generale del precedente teorema si possono ricavare, come con quello di Kummer, i più importanti criterii particolari noti di convergenza; p. es. facendo

$$a_n = \frac{1}{u.\, ln.\, l_2\, n\ \ldots\ l_s\, n}$$

e ricordando essere

$$\frac{(n+1).\, l(n+1)\ldots l_s(n+1)}{n.\, ln \ldots l_s\, n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n.\, ln} + \frac{1}{n.\, ln\, l_2\, n} + \ldots + \frac{1}{n.\, ln \ldots l_s\, n} + \frac{1}{n^2}$$

si trova che è convergente la serie, a termini positivi,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

se è

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n.\, ln} + \ldots + \frac{1}{n.\, ln \ldots l_{s-2}\, n} + \frac{1}{n.\, ln \ldots l_{s-1}\, n}\left(1 + \frac{2}{l_s\, n} + \frac{ln. \ldots l_{s-1} n}{n}\right)$$

cosicchè se è

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{n} + \frac{a_2}{n.\, ln} + \frac{a_3}{n.\, ln.\, l_2\, n} + \ldots$$

è convergente la serie

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

se è positivo il primo numero non nullo della successione

$$a_1 - 1 \qquad a_2 - 1 \qquad a_3 - 1 \ \ldots$$

ADUNANZA DEL 25 MAGGIO 1890. (Presidenza G. B. Guccia).

Memorie e Comunicazioni.

JUNG: *Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano.*

GIUDICE: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi* (Continuazione).

Calcolo approssimato del resto. — Sia

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

una serie a termini positivi di somma e resti conosciuti e sia proposto di calcolare per approssimazione il resto della serie

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

Pongasi

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} : \frac{v_n}{v_{n+1}} = \theta_n$$

e si avrà

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}\,.\, \theta_n\, u_{n+1}$$

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}\,.\, \theta_{n+1}\, v_{n+2} = \frac{v_n}{u_n}\,.\, \theta_n\,.\, \theta_{n+1}\,.\, u_{n+2}$$

. . . .

$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots = \frac{v_n}{u_n} \cdot (\theta_n u_{n+1} + \theta_n \cdot \theta_{n+1} \cdot u_{n+2} + \theta_n \cdot \theta_{n+1} \cdot \theta_{n+2} \cdot u_{n+3} + \dots$$

per cui se, per qualunque valore di m, sia

$$0 < H \overline{\underline{<}}\, \theta_n \cdot \theta_{n+1} \dots \theta_{n+m} \overline{\underline{<}}\, K,$$

si avrà

$$H \cdot \frac{v_n}{u_n} \cdot (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) \overline{\underline{<}}\, v_{n+1} + v_{n+2} + \dots \overline{\underline{<}}\, \frac{v_n}{u_n} \cdot (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) \cdot K.$$

Perchè il calcolo accennato dia valore sufficentemente approssimato al resto cercato conviene che H e K siano abbastanza vicini. Per conseguir ciò, posto

$$\frac{(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \cdot v_{n+1}}{(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) \cdot v_n} - 1 = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + \frac{k_3}{n^3} + \dots$$

si scelga convenientemente la funzione α_n con coefficenti letterali e si determinino questi in modo che α_n tenda a zero col crescere di n e che siano nulli $k_1\, k_2\, k_3 \dots k_m$ dove m è un intero prefissato, la qual cosa si può ottenere risolvendo sole equazioni lineari, con un processo insegnato da Kummer (*Crelle's Journal*, XVI, 1837, pag. 206) quando $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ sia sviluppabile secondo le potenze ascendenti di $\frac{1}{n}$. In questo modo, per mezzo della serie

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots$$

che ha per somma α_1 e per n^{mo} resto α_n, si potrà ottenere con prefissata approssimazione il resto n^{mo} della serie Σv_n.

Se $[(\alpha_n - \alpha_{n+1}) v_{n+1} : (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) v_n] - 1$ è riducibile ad una frazione algebrica i cui termini siano polinomii interi in n, invece di sviluppare la medesima in serie e determinare i coefficenti di α_n in modo che s'annullino dei primi termini dello sviluppo, tanti quanti sono i coefficenti indeterminati, si potrà ottenere lo stesso scopo annullando i coefficenti dei termini più elevati del numeratore di tal frazione. Mostreremo ciò approffittando della serie considerata nel precedente teorema.

ADUNANZA DELL'8 GIUGNO 1890. (Presidenza M. L. Albeggiani).

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazioni a schede segrete, il sig. Asutosh Mukhopâdhyây (Calcutta), proposto dai soci Guccia ed Albeggiani (M. L.), ed il sig. Ing. Giuseppe Delitala (Sassari), proposto dai soci Gerbaldi e Guccia, sono eletti *soci non residenti*.

Memorie e Comunicazioni.

CASTELNUOVO: *Sopra un teorema del sig. Humbert* (*vedi* pag. 195).

GIUDICE: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi* (Continuazione).

Si voglia un valore approssimato all'integrale definito $\int_0^1 \frac{l\,\frac{1}{x}\,.dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Si ha:

$$\int_0^1 \frac{l\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \frac{\pi}{2}.l2 = 1 + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1.3}{2.4.5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7^2} + \ldots$$

Indicando con u_n il termine n^{mo} dell'ultima serie, si ha

$$u_n = \frac{1.3.5.\ \ldots\ (2n-3)}{2.4.6.\ \ldots\ (2n-2).(2n-1)^2}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n.(2n+1)^2}{(2n-1)^3} = \frac{8n^3+8n^2+2n}{8n^3-12n^2+6n-1}\ .$$

Pongasi

$$a_n = \frac{n+\alpha}{\beta n^2+\gamma n+\delta}$$

e si avrà

$$a_n.\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{\beta n^3+(\alpha\beta+2\beta+\gamma+1)n^2+(2\alpha\beta+\alpha\gamma+2\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)n+(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha)}{\beta n^3+(\alpha\beta+\beta+\gamma)n^2+(\alpha\gamma+\gamma+\delta)n+\alpha\delta+\delta}$$

$$\begin{aligned}\left[a_n.\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right):\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]-1 = {} & [(12\beta-8)n^5+(4\alpha\beta-16\alpha+20\beta+20\gamma+4).n^4 \\ & +(-8\alpha^2+12\alpha\beta+12\alpha\gamma+16\alpha+3\beta+16\gamma+28\delta+6)n^3 \\ & +(12\alpha^2+\alpha\beta+8\alpha\gamma+20\alpha\delta-4\beta-3\gamma+4\delta-5)n^2 \\ & -(-6\alpha^2-4\alpha\beta-5\alpha\gamma-4\alpha\delta-4\alpha+\beta+\gamma+3\delta+1)n \\ & +\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha] : [8\beta n^6+(8\alpha\beta+4\beta+8\gamma+8)n^5 \\ & +(4\alpha\beta+8\alpha\gamma+16\alpha-10\beta-4\gamma+8\delta-4).n \\ & +(8\alpha^2-10\alpha\beta-4\alpha\gamma+8\alpha\delta-16\alpha-\beta-6\gamma-12\delta-6)n^3 \\ & +(-12\alpha^2-\alpha\beta-6\alpha\gamma-12\alpha\delta+4\beta+5\gamma+6\delta+5)n^2 \\ & +(6\alpha^2+4\alpha\beta+5\alpha\gamma+6\alpha\delta+4\alpha-\beta-\gamma-\delta-1)n-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha].\end{aligned}$$

Eguagliando a zero i coefficenti di n^5 n^4 n^3 n^2 nel numeratore ed approffittando delle equazioni che vengono formate prima per semplificare le successive si ottiene:

$$3\beta-2=0 \qquad 10\alpha-15\gamma-13=0$$

$$455.\gamma+350.\delta+321=0 \qquad 495.\gamma+614=0.$$

Da queste si ricava subito

$$\beta=\frac{2}{3}=\frac{4620}{6930}, \qquad \gamma=-\frac{614}{495}=-\frac{8596}{6930}$$

$$\delta=\frac{4819}{6930} \qquad \alpha=-\frac{37}{66}=-\frac{3885}{6930}$$

per cui si farà

$$a_n=\frac{6930.n-3885}{4620.n^2-8596n+4819}\ .$$

ADUNANZA DEL 22 GIUGNO 1890 (Presidenza G. B. Guccia).

Ammissione di nuovi soci.—Dietro votazione a schede segrete, il sig. Giuseppe Lanza, conte di Mazzarino, proposto dai soci Guccia ed Albeggiani (G.), è eletto *socio residente*.

Memorie e Comunicazioni.

VENTURI: *Sopra un caso generale di compensazione angolare.*

GIUDICE: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi* (Continuazione).

Posto

$$a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) : \frac{u_n}{u_{n+1}} = \theta_n, \qquad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = R_n$$

si ha così:

$$\theta_n = 1 + (-117495840.n + 15104880):$$

$$:(256132800n^6 - 107886240.n^5 - 242219040n^4 + 84152880n^3 + 131832540n^2 + 29347710n)$$

$$R_n = \frac{u_n}{\theta_n} \cdot \left(\theta_n \cdot \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} + \theta_n \cdot \theta_{n+1} \cdot \frac{a_{n+2}}{(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})} + \ldots\right)$$

per cui, essendo $\theta_n > 1 - \frac{1}{2n^5}$ ed

$$\frac{1}{n^5} + \frac{1}{(n+1)^5} + \frac{1}{(n+2)^5} + \ldots < \left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)^4} - \frac{1}{(n+2)^4}\right) + \ldots$$

si ha

$$\frac{u_{10}}{a_{10}} \cdot \left(1 - \frac{1159853520}{2430196152 : 1100}\right) > R_{10} > \left(1 - \frac{1}{20000}\right) \cdot \frac{u_{10}}{a_{10}}.$$

Essendo u_{10} a_{10} e la somma dei primi dieci termini dati, rispettivamente, da

$$0{,}000513768 \ldots \qquad \frac{65415}{380859} \qquad 1{,}085801808 \ldots$$

si trova così:

$$1,08879292 < 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^2} + \ldots < 1{,}08879306$$

per cui è, a meno di 0,0000001,

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7^2} + \ldots = 1{,}0887930 \ldots$$

Per avere con calcolo diretto la stessa approssimazione si dovrebbero addizionare più di mille termini della serie posta nel primo membro.

Un criterio per la divergenza si potrebbe avere considerando la serie

$$(1+a_1)+[(1+a_1)(1+a_2)-(1+a_1)]+[(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)-(1+a_1)(1+a_2)+\ldots$$

ma qui si dovrebbe supporre divergente

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

e si troverebbe un noto criterio del sig. Dini (*Annali dell'Università Toscana*, IX, 1867, pag. 59) e del Genocchi (*N[illegible] Mathématiques*, II_6, 1867).

ADUNANZA DEL 13 LUGLIO 1890. (Presidenza G. B. Guccia).

Il Segretario partecipa alla Società che il socio non residente signor Camillo Jordan si è fatto inscrivere, ai sensi dell'Art. 11 dello Statuto, come *socio perpetuo*, versando in unica volta nella Cassa del Circolo la somma di lire trecento.

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI: *Alcune formole relative all'operazione* Ω.

GIUDICE: *Per un recente articolo del sig. Fouret.*

Il sig. Fouret, in un recente articolo (*Nouvelles Annales de Math.*, 1890, Mai) conclude che si equivalgono i criterii di convergenza per le serie a termini positivi forniti dalle espressioni $\sqrt[n]{u_n}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (pag. 222-223). Ciò non è del tutto vero ed è specialmente inesatta l'affermazione (pag. 223) « Cette proposition une fois établie, la réciproque en résultera sans démonstration. » Il Prof. Cesàro negli stessi *Nouvelles Annales* (1888, pag. 55-59) ha fatto vedere come possa tendere ad un limite $\sqrt[n]{u_n}$ anche in casi nei quali oscilla sempre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ e prima ancora aveva rilevata, incidentalmente, la stessa cosa in questo Circolo (*Rend. Circ. Matem. di Palermo*, 1887, pag. 225-226). Confermerò tuttavia quanto sopra ho detto con una osservazione molto semplice.

Sia u_n il termine generale, positivo, di una serie per la quale sia

$$\lim.\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim.\sqrt[n]{u_n} = \lambda$$

e sia k_n il termine n^{mo} d'una successione di interi positivi tali da aversi

$$k_{n+1} > k_n \qquad \lim.\frac{k_{n+1}}{k_n} = 1.$$

Dividiamo in gruppi i termini della serie ponendo nel gruppo m^{mo} i termini

$$u_{k_{m-1}+1}\, u_{k_{m-1}+2} \,\ldots\, u_{k_m}.$$

Se noi, senza spostare i gruppi, permutiamo arbitrariamente i termini di ciascun gruppo ed indichiamo con v_n il termine n^{mo} della nuova serie, avremo

$$\lim.\sqrt[n]{v_n} = \lim.\sqrt[n]{u_n} = \lambda$$

mentre, molto probabilmente, non tenderà ad un limite $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Se, p. es., nella serie geometrica

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

si formano gruppi di uno, due, tre, ecc., termini e poi si scrivono i termini d'ogni gruppo in modo che il primo, l'ultimo, il secondo, il penultimo, ecc., divengano, ri-

spettivamente primo, secondo, terzo, quarto, ecc., termine, si ottiene la serie .

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^5 + q^4 \dots + q^{\frac{(n-1)n}{2}+1} + q^{\frac{(n-1)n}{2}+n}$$
$$+ q^{\frac{(n-1)n}{2}+2} + q^{\frac{(n-1)n}{2}+n-1} + \dots$$

Indicando con v_n il termine n^{mo} di questa serie e con u_n quello della precedente, cosicchè sarà $u_n = q^n$, si ha, per $\frac{(n-1).n}{2} < m \leqq \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\sqrt[m]{v_m} = q^{\frac{1+2\lambda:n(n-1)}{1+2\mu:n(n-1)}}$$

dove λ e μ sono numeri presi convenientemente nella successione $1\ 2 \dots n$. Si ha quindi:

$$\lim. \sqrt[n]{v_n} = \lim. \sqrt[n]{u_n} = \lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

mentre $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tende ad ognuno degli infiniti numeri

$$\begin{matrix} q & q^2 & q^3 & q^4 & \dots \\ \frac{1}{q} & \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q^3} & \frac{1}{q^4} & \dots \end{matrix}$$

ADUNANZA DEL 27 LUGLIO 1890. (Presidenza G. B. Guccia).

Il PRESIDENTE annuncia, con rammarico, alla Società, che la sera del 15 corrente mese cessava di vivere, in Palermo, il Socio residente sig. Salvatore Conigliaro.

Affari interni.

ADUNANZA DEL 10 AGOSTO 1890. (Presidenza M. L. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

CERTO: *Teorema sugli angoli di un poligono convesso.*

« *In ogni poligono piano convesso vi sono sempre m angoli interni consecutivi la cui somma sia maggiore di m angoli retti: eccettuato il triangolo; ed eccettuato il parallelogrammo, se $m = 2$, ovvero il quadrato, se $m = 3$, ovvero il quadrilatero, in generale se $m = 4$* ».

Infatti, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ gli angoli del poligono e con ρ un angolo retto, se fosse sempre

(1) $$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} \leqq m\rho \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

sommando queste n relazioni si otterrebbe

$$m \sum_1^n \alpha_i \leqq n m \rho$$

e' quindi

(2) $$\sum_{1}^{n} \alpha_i \equiv n\rho.$$

Ma è noto che

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i = (2n - 4)\rho\,;$$

donde, supponendo $n > 4$,

(3) $$\sum_{1}^{n} \alpha_i > n\rho.$$

La necessità della esistenza di una o più delle relazioni (1), nell'ipotesi di $n > 4$, risulta dunque dalla contradizione della (2) e della (3).

I casi di $n = 3$ e di $n = 4$ si esaminano a parte.

ADUNANZA DEL 24 AGOSTO 1890. (Presidenza M. L. Albeggiani).

Memorie e Comunicazioni.

ALAGNA: *Intorno ad alcuni casi di multiplicità delle radici dell'equazione d'ottavo ordine.*

CERTO: *Intorno ad una dimostrazione di un teorema sugli angoloidi.*

Nel caso particolare che sia $m = 2$, il teorema comunicato nell'Adunanza precedente ci assicura che « In un qualunque poligono convesso (tranne il triangolo e « il parallelogrammo) non può mancare una coppia di lati consecutivi ad uno stesso « lato, tali che il punto d'incontro delle loro rette sia da quella banda della retta « del terzo lato dove non è il poligono ».

Questa proprietà, se ben si considera, è implicitamente supposta nella dimostrazione diretta, che in quasi tutt'i trattati moderni di Geometria elementare (p. es. in quelli di Amiot, di Sannia e d'Ovidio, di Faifofer, di De Paolis, etc.) si è sostituita all'altra che si trova in Euclide e in Legendre, del caso generale del teorema: In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di quattro angoli retti.

Del resto quella dimostrazione può essere completata anche soltanto coll'aggiungere che, determinata la retta intersezione dei piani cui appartengono le due facce contigue a una faccia qualunque dell'angoloide dato, bisogna scegliere quelle delle due direzione della retta, uscenti dal vertice, la quale, rispetto al piano cui appartiene la terza faccia, sta da quella banda ove non si trova l'angoloide.

La direzione scelta, e soltanto essa, sostituita agli spigoli che terminano la terza faccia, darà il nuovo angoloide con una faccia di meno del dato e colle proprietà necessarie alla dimostrazione della quale parliamo.

G. B. G. M. L. A.

INTORNO AD ALCUNI CASI DI MULTIPLICITÀ DELLE RADICI DELL'EQUAZIONE D'OTTAVO ORDINE;

Nota di **Rosario Alagna**, in Palermo.

Adunanza del 24 agosto 1890.

Nei Rendiconti di questo Circolo (*) il prof. Maisano ha dato le relazioni fra gl'invarianti d'una forma d'8° ordine con un elemento triplo e l'espressione del discriminante della forma generale di 8° ordine. In una mia nota pubblicata negli stessi Rendiconti (**) si trovano le relazioni fra gl'invarianti di una forma dell'8° ordine con quattro elementi doppii. Continuando queste ricerche, mi propongo di considerare i casi in cui la forma ha:

1° Un punto triplo e uno doppio
2° Un punto triplo e due doppii
3° Due punti tripli
4° Due punti tripli e uno doppio.

Crediamo conveniente di supporre la forma scomposta nel prodotto del quadrato d'una forma quadratica φ per una forma biquadratica χ e cominciare dallo stabilire alcune relazioni fra gl'invarianti simultanei di φ e χ.

(*) Tomo IV, pag. 1-8.
(**) Tomo IV, pag. 25-29.

§ 1.

Sia

$\varphi = \alpha_x^2 = \alpha_x'^2 = \ldots\ldots\ldots$ la forma quadratica

e

$\chi = \gamma_x^4 = \gamma_x'^4 = \ldots\ldots\ldots$ la forma biquadratica.

Delle 18 forme che costituiscono il sistema simultaneo completo di φ e χ non impiegheremo nei nostri calcoli che le seguenti:

$$\varphi,\ \chi,\ D = (\alpha\alpha')^2;\quad i = (\gamma\gamma')^4;\quad j = (\gamma H)^4;\quad A = (\alpha\gamma)^2(\alpha'\gamma)^2;$$

$$B = (\alpha H)^2(\alpha' H)^2;\quad \mu = (\alpha\gamma)^2\gamma_x^2;\quad \nu = (\alpha H)^2 H_x^2;\quad H = (\gamma\gamma')^2\gamma_x^2\gamma_x'^2.$$

Nell'opera del Clebsch (*) sono dimostrate le relazioni seguenti:

$$(\mu\mu')^2 = B + \frac{1}{3} Di \tag{1}$$

$$(\mu\nu)^2 = \frac{1}{2.3} Ai + \frac{1}{3} Dj \tag{2}$$

$$(\nu\nu')^2 = \frac{1}{3} Aj - \frac{1}{2.3} Bi + \frac{1}{2.3^2} Di^2. \tag{3}$$

Giusta una formula del Gordan, si ha:

$$(\gamma\gamma')^2\gamma_x^2\gamma_y'^2 = H_x^2 H_y^2 + \frac{1}{3} i (xy)^2$$

$$(\gamma H)^2 \gamma_x^2 H_y^2 = \frac{1}{2.3} i \gamma_x^2\gamma_y^2 + \frac{1}{3} j (xy)^2$$

$$(HH')^2 H_x^2 H_y'^2 = \frac{1}{3} j \gamma_x^2\gamma_y^2 - \frac{1}{2.3} i H_x^2 H_y^2 + \frac{1}{2.3^2} i^2 (xy)^2;$$

dalle quali si ricava

$$(\mu\gamma)^2\gamma_x^2 = \nu + \frac{1}{3} i\varphi \tag{4}$$

$$(\mu H)^2 H_x^2 = \frac{1}{2.3} i\mu + \frac{1}{3} j\varphi \tag{5}$$

$$(\nu H)^2 H_x^2 = \frac{1}{3} j\mu - \frac{1}{2.3} i\nu + \frac{1}{2.3^2} i^2\varphi. \tag{6}$$

(*) *Theorie der binären algebraischen Formen*, pag. 215.

Ponendo

$$p_x^4 = \mu_x^2 \mu_x'^2 ,$$

ha

$$p_x^2 p_y^2 = \mu_y'^2 \cdot \mu - \frac{1}{3} (\mu \mu')^2 (xy)^2 ;$$

nde per la (1)

$$(\mu^2, \varphi)^2 = A \mu - \frac{1}{3} B \varphi - \frac{1}{3^2} D i \varphi . \qquad (7)$$

In egual modo si trovano le relazioni

$$(\varphi \nu , \varphi)^2 = \frac{1}{2} D \nu + \frac{1}{2.3} B \varphi \qquad (8)$$

$$(\varphi^2 , \varphi)^2 = \frac{2}{3} D \varphi . \qquad (9)$$

Facendo le 2^e sovrapposizioni di $\varphi \chi$ e $\varphi^2 \mu$ sopra φ, μ e χ si ha r la (4)

$$(\varphi \chi , \varphi)^2 = \frac{1}{3} D \chi + \frac{2}{5} \varphi \mu \qquad (10)$$

$$(\varphi \chi , \mu)^2 = \frac{1}{3} A \chi + \frac{2}{3^2} i \varphi^2 + \frac{2}{3} \varphi \nu - \frac{2^2}{3.5} \mu^2 \qquad (11)$$

$$(\varphi \chi , \chi)^2 = \frac{1}{3.5} \mu \chi + \frac{2}{3} \varphi H \qquad (12)$$

$$(\varphi^2 \mu , \varphi)^2 = \frac{1}{3.5} A \varphi^2 + \frac{2^3}{3.5} D \varphi \mu \qquad (13)$$

$$(\varphi^2 \mu , \mu)^2 = \frac{1}{3} B \varphi^2 + \frac{1}{3^2} A D i \varphi^2 + \frac{2}{5} A \varphi \mu - \frac{2}{3.5} D \mu^2 \qquad (14)$$

$${}^2 \mu , \chi)^2 = - \frac{2^2}{3.5} A \varphi \chi - \frac{2}{3.5} D \mu \chi + \frac{1}{3^2} \varphi^3 + \frac{1}{3} \varphi^2 \nu + \frac{2}{3} \varphi \mu^2 . \qquad (15)$$

Similmente si trova

$$(\varphi \mu , \chi) = - \frac{1}{3} A \chi + \frac{1}{2.3} i \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi \nu + \frac{1}{2} \mu^2 \qquad (16)$$

$$(\varphi^2 , \chi)^2 = \varphi \mu - \frac{1}{3} D \chi , \qquad (17)$$

Per le (1), (2) e (4) si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
(\chi\mu,\ \mu)^2 &= \frac{1}{3} B\chi + \frac{1}{3^2} Di\chi + \frac{2}{3\cdot 5} i\varphi\mu + \frac{2}{5}\mu\nu \\
(\varphi\mu^2,\ \mu)^2 &= \frac{2^3}{3\cdot 5} B\varphi\mu + \frac{2^3}{3^2\cdot 5} Di\varphi\mu + \frac{1}{3\cdot 5} A\mu^2 \\
(\varphi^3,\ \mu)^2 &= A\varphi^2 - \frac{2}{5} D\varphi\mu \\
(\varphi^2\nu,\ \mu)^2 &= \frac{1}{2.3^2} Ai\varphi^2 + \frac{1}{3^2} Dj\varphi^2 - \frac{2^2}{3\cdot 5} B\varphi\mu + \frac{2}{3} A\varphi\nu - \frac{2}{3\cdot 5} D\mu\nu
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Ci serviranno inoltre le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
(\varphi\mu,\ \varphi\mu)^4 &= \frac{1}{2.5} A^2 + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2.3} D^2 i \\
(\varphi^2,\ \varphi^2)^4 &= \frac{2}{3} D^2 \\
(\mu^2,\ \mu^2)^4 &= \frac{2}{3}\left(B + \frac{1}{3} Di\right)^2 \\
(\varphi\mu,\ \varphi^2)^4 &= \frac{2}{3} AD \\
(\varphi\mu,\ \mu^2)^4 &= \frac{2}{3} A\left(B + \frac{1}{3} Di\right) \\
(\varphi^2,\ \mu^2)^4 &= A^2 - \frac{1}{3} D\left(B + \frac{1}{3} Di\right)
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

e le altre

$$\left.\begin{aligned}
(\mu\nu,\ \varphi\mu)^4 &= \frac{1}{2^2.3^2} A^2 i + \frac{1}{2.3^2} ADj + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2.3} BDi \\
(\mu\nu,\ \varphi^2)^4 &= AB - \frac{1}{2.3^2} ADi - \frac{1}{3^2} D^2 j \\
(\mu\nu,\ \mu^2)^4 &= \frac{1}{3^2} ABi + \frac{1}{3^3} ADi^2 + \frac{2}{3^2} BDj + \frac{2}{3^3} D^2 ji
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Si potrebbe infine dimostrare la seguente relazione

$$A\chi - \frac{1}{2.3} i\varphi^2 - 2\varphi\nu - \mu^2 + DH \equiv 0 \qquad (21)$$

della quale faremo uso in seguito.

§ 2.

Le relazioni trovate si prestano al calcolo dei covarianti e invarianti della forma fondamentale f in funzione dei covarianti e invarianti simultanei di φ e χ.

Ponendo infatti

$$f = \varphi^2 \cdot \chi$$

per polarizzazioni successive si ottiene

$$a_x^6 a_y^2 = \frac{1}{2}\, \alpha_y^2 \varphi \chi - \frac{1}{2 \cdot 7}\, D^2 \chi (xy)^2 - \frac{2}{7}\, \varphi \mu (xy)^2 + \frac{1}{2}\, \varphi^2 \gamma_x^2 \gamma_y^2 \qquad (a)$$

$$a_x^4 a_y^4 = \frac{3^2}{2.5 \cdot 7}\, \alpha_y^2 \alpha_y'^2 \chi - \frac{2^2}{5 \cdot 7}\, \alpha_y^2 \mu (xy)^2 + \frac{2.13}{5 \cdot 7}\, \varphi . \alpha_y^2 \gamma_x^2 \gamma_y^2 -$$
$$- \frac{2.3}{5 \cdot 7}\, D \gamma_x^2 \gamma_y^2 (xy)^2 - \frac{2^2}{5 \cdot 7}\, \varphi \mu_y^2 (xy)^2 + \frac{3^2}{2.5 \cdot 7}\, \varphi^2 \gamma_y^4 . \qquad (b)$$

Da quest'ultima per la (4) si ha

$$(a\gamma)^4 a_x^4 = \frac{3^2}{2.5 \cdot 7}\, A\chi + \frac{71}{2.3.5 \cdot 7}\, i\varphi^2 - \frac{2^2}{5 \cdot 7}\, \mu^2 + \frac{2.11}{5 \cdot 7}\, \varphi\nu - \frac{2.3}{5 \cdot 7}\, DH \qquad (22)$$

e da questa facendo uso delle (7), (8) e (9) si ricava

$$(a\gamma)^4 (a\alpha)^2 a_x^2 = \frac{1}{7}\, B\varphi + \frac{5}{3 \cdot 7}\, Di\varphi + \frac{1}{2.5 \cdot 7}\, A\mu + \frac{1}{7}\, D\nu . \qquad (23)$$

La (a) ci dà

$$(a\alpha)^2 a_x^6 = \frac{3}{7}\, D\varphi\chi + \frac{3}{2 \cdot 7}\, \varphi^2 \mu \qquad (24)$$

donde per le (10) e (13)

$$(a\alpha)^2 (a\alpha')^2 a_x^4 = \frac{1}{7}\, D^2 \chi + \frac{1}{2.5 \cdot 7}\, A\varphi^2 + \frac{2}{7}\, D\varphi\mu \qquad (25)$$

e da questa, facendo uso delle (16) e (17)

$$(a\alpha)^2 (a\alpha')^2 (a\gamma)^2 a_x^2 \gamma_x^2 = - \frac{1}{2.5}\, DA\chi + \frac{1}{3 \cdot 7}\, Di\varphi^2 + \frac{1}{2.5 \cdot 7}\, A\varphi\mu$$
$$+ \frac{1}{7} D\varphi\nu + \frac{1}{7} D\mu^2 + \frac{1}{7}\, D^2 H . \qquad (26)$$

La (24) per le (11) e (14) ci dà

$$(a\alpha)^2(a\mu)^2 a_x^4 = \frac{1}{7} DA\chi + \frac{5}{2.3.7} Di\varphi^2 + \frac{1}{2.7} B\varphi^2 + \frac{3}{5.7} A\varphi\mu$$

$$+ \frac{2}{7} D\varphi\nu - \frac{1}{7} D\mu^2 \tag{27}$$

Calcolo di k. — Dalla (a) per le (22), (23), (26) e (27) si ricava

$$k = \frac{1}{2^3.5.7^2}[-2.7^2 DA\chi + 83\, Di\varphi^2 + 2.5^2 B\varphi^2 - 2.5\, A\varphi\mu + 2^4 D\varphi\nu + 2.59\, D\mu^2 + 2.41\, D^2H$$

la quale, facendo uso della (21), può scriversi

$$k = \frac{1}{2^3.3.7^2}[-2.3^3 DA\chi + 7^2 Di\varphi^2 + 2.3.5 B\varphi^2 - 2.3 A\varphi\mu + 2.3.11 D\mu^2 + 2.3^3 D^2H]. \; ($$

Calcolo di g. — La (24) per le (12) e (15) ci dà

$$(a\alpha)^2(a\gamma)^2 a_x^4\gamma_x^2 = \varphi\left(-\frac{2}{5.7}A\chi + \frac{1}{2.3.7}i\varphi^2 + \frac{1}{2.7}\varphi\nu + \frac{1}{7}\mu^2 + \frac{2}{7}DH\right). \tag{28}$$

Inoltre dalla (a) si ricava

$$(a\gamma)^2 a_x^6\gamma_x^2 = \frac{3}{2.7}\varphi\mu\chi - \frac{1}{2.7}D\chi^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 H \tag{29}$$

$$(a\mu)^2 a_x^6 = \frac{1}{2}A\varphi\chi - \frac{1}{2.7}D\mu\chi + \frac{1}{2.3}\varphi^3 + \frac{1}{2}\varphi^2\nu - \frac{2}{7}\varphi\mu^2. \tag{30}$$

Dalla (b) mediante le tre relazioni precedenti e le (21), (22), (24), (25) si ottiene

$$g = \frac{1}{2^2.5.7^2}[2.3.5 D^2\chi^2 - 2.3.7 A\varphi^2\chi - 2^3.5 D\varphi\mu\chi + 5.7 i\varphi^4 + 2^2.3.5\varphi^2\mu^2 + 2^2.5.7 D\varphi^2 H]. \; ($$

Calcolo di m. — Dalla (30) si ricava per le (11) e (18)

$$(a\mu)^2(a\mu')^2 a_x^4 = \left(\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2.3.7}BD - \frac{1}{2.3^2.7}D^2 i\right)\chi +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^2}Ai + \frac{1}{2.3^2}Dj\right)\varphi^2 - \left(\frac{2^3}{3^2.7}Di + \frac{2}{7}B\right)\varphi\mu -$$

$$- \frac{2}{3.7}D\mu\nu - \frac{17}{5.7}A\mu^2 + \frac{1}{3}ADH. \tag{31}$$

Dalla (b) inoltre si ha per la (5)

$$(aH)^4 a_x^4 = \left(\frac{3^2}{2.5.7}B - \frac{1}{5.7}Di\right)\chi + \frac{71}{2.3.5.7}j\varphi^2 + \frac{11}{3.5.7}i\varphi\mu - \frac{2^2}{5.7}\mu\nu. \quad (32)$$

Facendo la 4ª sovrapposizione di f sopra k, le (22), (25), (27), 31) e (32) ci dànno

$$m = \frac{1}{2.3^2.5.7^3}[(3^2.43\, A^2 D + 3.13^2 B D^2 + 7.37 D^3 i)\chi +$$

$$(3^2.7\, ADi + 1151\, D^2 j)\varphi^2 - (3^3 A^2 + 2^2.3^3.5\, BD - 2^4.37\, D^2 i)\varphi\mu -$$

$$- 2.3.109\, D^2 \mu\nu - 2.3^3.7.\, AD\mu^2 + 3.5.47\, AD^2 H]. \quad \text{(III)}$$

Calcolo di J_2. — Dalla (25) si ha immediatamente

$$J_2 = \frac{1}{2.5.7}A^2 + \frac{2}{7}BD + \frac{5}{3.7}D^2 i. \quad \text{(IV)}$$

Calcolo di J_3. — Le (22), (25), (27) ci forniscono le relazioni

$$(f,\ \chi^2)^8 = \frac{2.3^2}{5.7}Ai$$

$$(f,\ \varphi^2\mu^2)^8 = \frac{1}{2.5.7}A^3 + \frac{13}{2.5.7}ABD + \frac{2}{3.5}AD^2 i + \frac{1}{3.7}D^3 j$$

$$(f,\ \varphi^2 H)^8 = \frac{1}{2.5.7}AB + \frac{1}{3.7}ADi + \frac{5}{3.7}D^2 j$$

$$(f,\ \varphi^4)^8 = \frac{2^2.3}{5.7}AD^2$$

$$(f,\ \varphi\mu\chi)^8 = \frac{11}{2.5.7}AB + \frac{2^2}{3.5}ADi + \frac{1}{3.7}D^2 j$$

er le quali dalla (II) si ricava

$$= \frac{3}{2.5.7^3}A^3 - \frac{3}{2.5.7}AJ_2 + \frac{2^2.3}{5.7^3}ABD + \frac{11}{7^3}AD^2 i + \frac{2^2.3}{7^3}D^3 j. \quad \text{(V)}$$

Calcolo di J_4. — Facendo la 4ª sovrapposizione di k sopra sè

stessa, si ha per le (19) e per la teoria delle forme biquadratiche

$$J_4 = \frac{1}{2^3.3.7^4} A^4 + \frac{103}{2^3.3.7^4} A^2 B D + \frac{37}{2^3.3^2.7^4} A^2 D^2 i + \frac{5.313}{2^2.3^3.7^4} D^4 i^2$$

$$+ \frac{3.113}{3.7^4} B^2 D^2 + \frac{5.389}{2^2.3^2.7^4} B D^3 i - \frac{2.3}{7^3} A D^3 j. \qquad \text{(VI)}$$

Calcolo di J_5. — Dalle (I) e (III) per le (20) si ottiene infine

$$J_5 = \frac{1}{2^3 5.7^5} A^5 - \frac{1}{2^3.5.7^4} A^3 B D + \frac{31}{2^2.3.5.7^5} A^3 D^2 i - \frac{3^2}{2.5.7^5} A B^2 D^2 +$$

$$+ \frac{47}{2^2.7^5} A B D^3 i + \frac{2.5.11}{3.7^5} A D^4 i^2 + \frac{1453}{2^2.3.5.7^5} A^2 D^3 j +$$

$$+ \frac{193}{3.7^5} B D^4 j + \frac{5.193}{2.3^2.7^5} D^5 j i. \qquad \text{(VII)}$$

Se noi supponiamo riferita la f ai suoi elementi doppii, ponendo $\varphi = 2 x_1 x_2$ si ha $D = -2$ e i valori degl'invarianti potranno più semplicemente scriversi

$$J_2 = \frac{1}{2.5.7} A^2 - \frac{2^2}{7} B + \frac{2^2.5}{3.7} i \qquad \text{(IV')}$$

$$J_3 = \frac{3}{2.5.7^3} A^3 - \frac{3}{2.5.7} A J_2 - \frac{2^3.3}{5.7^3} A B + \frac{2^2.11}{7^3} A i - \frac{2^5.3}{7^3} j \qquad \text{(V')}$$

$$J_4 = \frac{1}{2^3.3.7^4} A^4 - \frac{103}{2^2.3.7^4} A^2 B + \frac{37}{2.3^2.7^4} A^2 i + \frac{2^4.3}{7^3} A j$$

$$+ \frac{2^2.113}{3.7^4} B^2 + \frac{2^2.5.313}{3^3.7^4} i^2 - \frac{2.5.389}{3^2.7^4} B i \qquad \text{(VI')}$$

$$J_5 = \frac{1}{2^3.5.7^5} A^5 + \frac{1}{2^2.5.7^4} A^3 B + \frac{31}{3.5.7^5} A^3 i - \frac{2.1453}{3.5.7^5} A^2 j - \frac{2.3^2}{5.7^5} A B^2$$

$$+ \frac{2.^5 5.11}{3.7^5} A i^2 - \frac{2.47}{7^5} A B i + \frac{2^4.193}{3.7^5} B j - \frac{2^4.5.193}{3^2.7^5} j i. \qquad \text{(VII')}$$

§ 3.

Le espressioni precedenti di J_2, J_3, J_4, J_5 si prestano alla ricerca delle condizioni richieste. Cominceremo pertanto dal

1° Caso — Un punto triplo e uno doppio.

Poichè abbiamo supposto $f = \varphi^2 \chi$, avrà la forma fondamentale un punto triplo e uno doppio se la χ ha un punto comune con φ.

Dev'essere pertanto eguale a zero la risultante di φ e χ, cioè (*)

$$A^2 - 4BD + \frac{2}{3} D^2 i = 0$$

ovvero, essendo $D = -2$,

$$3A^2 + 2^3.3B + 2^3 i = 0. \tag{33}$$

Da questa relazione e dalle (IV'), (V') si ottengono linearmente i valori di B, i, j in funzione di A, J_2, J_3; cosicchè sostituendo questi valori in quelli di J_4 ed J_5 si ottengono le due equazioni di condizione

$$2^2.3^6A^4 - 2^2.3^5.5.7J_2.A^2 + 2^4.3.5^2.7^3J_3.A - 5^2.7.589J_2^2 + 2^5.3.5^2.7^3J_4 = 0$$

$$2^2.3^7A^5 - 2.3^5.5^2.7J_2.A^3 + 2.3^2.5^3.7^3J_3.A^2 + 5^3.7^3.193J_2J_3 - 2^3.3^2.5^3.7^4J_5 = 0$$

dalle quali eliminando la A si trova

$$\begin{aligned}
&113^2.589^3 J_2^{10} - 2^3.3.5.7^2.589^2.43957 J_2^8 J_4 + 2^8.5.7^4.1161070717 J_2^7 J_3^2 \\
&- 2^4.3^2.5.7^5.540942869 J_2^6 J_3 J_5 + 2^4.3^2.5.7^4.589.1198661 J_2^6 J_4^2 \\
&- 2^5.3^2.5^2 7^6.11.5036173 J_2^5 J_3^2 J_4 + 2^6.3^6.5.7^6.239567 J_2^5 J_5^2 \\
&+ 2^2.3.5^2.7^7.54806243 J_2^4 J_3^4 + 2^9.3^4.5^2.7^7.11.8831 J_2^4 J_3 J_4 J_5 \\
&- 2^9.3^3.5.7^6.1010543 J_2^4 J_4^3 - 2^3.3^4.5^2.7^8.681217 J_2^3 J_3^3 J_5 \\
&+ 2^6.3^3.5^2.7^8.682001 J_2^3 J_3^2 J_4^2 - 2^7.3^7.5^3.7^8.349 J_2^3 J_4 J_5^2 \\
&- 2^5.3^2.5^3.7^{10}.7391 J_2^2 J_3^4 J_4 + 2^7.3^6.5^2.7^9.893 J_2^2 J_3^2 J_5^2 \\
&- 2^9.3^5.5.7^9.14887 J_2^2 J_3 J_4^2 J_5 + 2^{14}.3^4.5^2.7^8.11.13. J_2^2 J_4^4 \\
&+ 2^3.3.5^3.7^{13}.193 J_2 J_3^6 + 2^7.3^6.5^2.7^{11}.109 J_2 J_3^3 J_4 J_5 \\
&- 2^{11}.3^3.5^2.7^{10}.323 J_2 J_3^2 J_4^3 + 2^{10}.3^8.5^2.7^{10}.11. J_2 J_3 J_5^3 + 2^{12}.3^8.5^2.7^{10}. J_2 J_4^2 J_5^2 \\
&- 2^6.3^3.5^3.7^{14}. J_3^5 J_5 + 2^6.3^3.5^3.7^{13} J_3^4 J_4^2 - 2^8.3^7.5^2.7^{13} J_3^2 J_4 J_5^2 \\
&+ 2^{15}.3^5.5^2.7^{11}. J_3 J_4^3 J_5 - 2^{19}.3^5.7^{10} J_4^5 - 2^8.3^{10}.5^2.7^{11} J_5^4 = 0.
\end{aligned} \tag{A}$$

(*) V. Clebsch, op. cit. pag. 216.

Questa relazione del 20° grado nei coefficienti di f non può alterare le relazioni di grado inferiore che debbono insieme ad essa coesistere nel caso di cui ci occupiamo; e però le 5 relazioni del prof. Maisano per un elemento triplo sussistono anche nel caso presente senza alcuna modificazione.

2° Caso — Un punto triplo e due doppii.

Perchè la f abbia un punto triplo e due doppii, basta che la χ abbia un punto triplo, che sia cioè

$$i = 0, \qquad j = 0.$$

Ricavando pertanto dalla (IV′) il valore di B in funzione di A^2 e J_2 e sostituendo nelle (V′), (VI′), (VII′) si trovano le relazioni

$$3^2 A^3 - 3^2.5.7\, J_2.A - 2.5^2.7^3 J_3 = 0$$

$$3.^3 7 A^4 - 2.3^2.5.7.11\, J_2.A^2 - 2^4.3.5^2.7^3 J_3.A + 2^3.5^2.7.113\, J_2^2 - 2^5.3.5^2.7^3 J_4 = 0$$

$$3^6 A^5 - 2^2.3^3.5^2.7\, J_2.A^3 - 2^2.3^2.5^3.7^3 J_3 A^2 - 3^2.5^4.7^2 J_2^2.A$$
$$+ 2^4.3^2.5^3.7^4 J_5 - 2.5^3.7^3.193\, J_2 J_3 = 0$$

le quali per la eliminazione della A ci forniscono le condizioni

$$113.841^2 J_2 - 2^2.3^2.7^2.841.883\, J_2^4 J_4 - 3.^3 5.7^5.299\, J_2^3 J_3^2 + 2^8.3^3.7^4.431\, J_2^2 J_4^2$$
$$+ 2^5.3^3.5.7^7.J_2 J_3^2 J_4 - 2.3.5^2.7^9 J_3^4 - 2^{12}.3^3.7^6 J_4^3 = 0 \qquad (B)$$

$$5^2.17533\, J_2^4 J_3 - 2^2.3^2.7.841\, J_2^3 J_5 - 2^4.3^2.5^4.7^2 J_2^2 J_3 J_4 + 2.5^3.7^4 J_2 J_3^3$$
$$+ 2^7.3^3.7^3.J_2 J_4 J_5 - 2^4.3^2.5.7^5 J_3^2 J_5 + 2^9.3^2.7^4 J_3 J_4^2 = 0. \qquad (C)$$

Di esse la (B) esprime la condizione che bisogna aggiungere a quelle del caso precedente perchè la forma f abbia un punto triplo e due doppii, e poichè essa è del 12° grado nei coefficienti, non altera le condizioni trovate per il punto triplo, ma riduce dal 20° grado all'11° quella trovata nel caso precedente. La relazione (A) del 1° caso assume dunque nel caso presente la forma espressa dalla (C).

3° Caso — Due punti tripli.

Supponendo la f riferita a questi punti, si può porre

$$f = 2^2 x_1^2 x_2^2 (4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3)$$

e però

$$\varphi = 2 x_1 x_2 ; \qquad \chi = 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 .$$

Si ha pertanto

$$A = 2^2 a_2 ; \quad B = \frac{2^2}{3}(2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) ; \quad i = 2(-4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) ;$$
$$j = 2.3 (2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3);$$

dalle quali si ricava

$$-\frac{2^5}{3} j = A^3 + 2^2.3 AB + 2^3 A i.$$

E poichè deve anche essere nulla la risultante di φ e χ, si può scrivere

$$\frac{2^4}{3} j = A^3 + 2.3 AB.$$

Questa relazione, la (33) e la (IV′) ci dànno modo di esprimere linearmente i valori di B, i, j in funzione di A e J_2; cosicchè le (V′), (VI′), (VII′) diventano

$$2.3^5 A^3 - 3^4.5.7 J_2 A + 2.5^2.7^3 J_3 = 0$$
$$2.3^5 J_2 A^2 - 2^2.3^2.5.7^2 J_3 A + 5.589 J_2^2 - 2^5.3.5.7^2 J_4 = 0$$
$$2.3^3.7 J_3 A^2 - 2.3^4. J_2^2 . A + 5.7.221 J_2 J_3 - 2^3.3^2.5.7^2 J_5 = 0$$

dalle quali, eliminando la A, si ottengono le relazioni

$$17^4.589 J_2^6 - 2^4.3^2.7^2.17^2.389 J_2^4 J_4 - 2^2.3^3.5.7^5.163 J_2^3 J_3^2 + 2^6.3^3.7^4.967 J_2^2 J_4^2$$
$$+ 2^5.3^4.5.7^7 J_2 J_3^2 J_4 + 2^2.3.5^2.7^9 J_3^4 - 2^{11}.3^3.7^6 J_4^3 = 0 \qquad (D)$$

$$5^2.2401 J_2^4 . J_3 - 3^4.7.289 J_2^3 J_5 - 2^3.3.5^3.7^2 J_2^2 J_3 J_4 - 2.3.5^3.7^4 J_2 J_3^3$$
$$+ 2^3.3^5.7^3 J_2 J_4 J_5 - 2^5.3^2.7^4 J_3 J_4^2 + 2.3^3.5.7^5 J_3^2 J_5 = 0. \qquad (E)$$

Di queste la (D) rappresenta la condizione caratteristica di due punti tripli e la (E) rappresenta la relazione alla quale si riduce la (A) per effetto della (D). Anche nel presente caso sussistono senza alcuna modificazione le 5 relazioni del punto triplo.

4° Caso — Due punti tripli e uno doppio.

Ponendo, come nel caso precedente

$$f = 2^2 x_1^3 x_2^3 (4 a_1 x_1^2 + 6 a_2 x_1 x_2 + 4 a_3 x_2^2),$$

la f avrà due punti tripli e uno doppio se sarà eguale a zero il discriminante della forma quadratica chiusa fra parentesi, se si ha cioè

$$2^4 a_1 a_3 = 3^2 a_2.$$

Sarà quindi

$$B = -\frac{5}{2^3} A^2; \quad i = \frac{3}{2^5} A^2; \quad j = \frac{3}{2^8} A^3$$

e le (IV′), (V′), (VI′), (VII′) diventano

$$3^3 A^2 - 2^2.5.7\, J_2 = 0$$
$$3^2 J_2 . A - 2.5.7^2 J_3 = 0$$
$$2^2.3^2.7^2 J_3 . A - 1093\, J_2^2 + 2^5.3.7^2 J_4 = 0$$
$$2.3^4 J_2^2 A - 5.7.277\, J_2 J_3 + 2^3.3^2.5.7^2 J_5 = 0$$

dalle quali eliminando la A, si ottengono le relazioni

$$3 . J_2^3 - 5.7^3 J_3^2 = 0 \qquad (F)$$
$$5^2.37\, J_2^2 - 2^5.3.7^2 J_4 = 0 \qquad (G)$$
$$5^2 J_2 J_3 - 2^3.3^2.7\, J_5 = 0. \qquad (H)$$

La (F) è l'equazione caratteristica del caso che si considera, la quale essendo del 6° grado trasforma le (D) ed (E) del caso precedente nelle (G) ed (H). Le 5 relazioni trovate nel caso in cui la f ha un punto triplo debbono sussistere anche nel caso presente, ma esse vengono rese più semplici ed assumono la forma

$$\left.\begin{aligned}
5.4799\, J_2^3 - 2^6.3^2.7^4 J_6 &= 0 \\
5^5 . J_2^2 J_3 - 2^6.3^3.7^3 J_7 &= 0 \\
5^5.197\, J_2^4 + 2^9.3^3.7^5 J_8 &= 0 \\
5^4.113\, J_2^3 J_3 + 2^9.3^4.7^3 J_9 &= 0 \\
5^3.13.9701\, J_2^5 - 2^{12}.3^4.7^6 J_{10} &= 0.
\end{aligned}\right\} (K)$$

Palermo, 23 agosto 1890.

Rosario Alagna.

EXTRAITS D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. G.-B. GUCCIA;

par M. **Max Noether**, à Erlangen.

Adunanza del 23 novembre 1890.

. . . .

Au sujet de la controverse de M. Humbert et de M. Castelnuovo (*) je vois plus clairement à présent: *au fond il n'y a pas de contradiction entre les assertions de M. Humbert et celles de M. Castelnuovo.* M. Humbert a raison de dire qu'il peut exprimer les coordonnées de ses surfaces comme fonctions univoques, fuchsiennes, de deux paramètres; mais, réciproquement, ces paramètres sont-ils des fonctions *univoques* des coordonnées de la surface *en général?*

Par là la controverse est amenée à la définition du *mot* « en général »! Si l'on part d'une surface assez générale—comme p. ex. la surface du 3^{me} ordre—les représentations sont spéciales, la reversion n'est pas univoque, M. Castelnuovo a raison. Si l'on part d'une représentation générale, la reversion est univoque, la surface devient spéciale et M. Humbert a raison!

(*) Ces *Rendiconti*, t. III, p. 277-278; t. IV, p. 69-71, 71-72, 195-196.

. . . .

Addition à la Note : « Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier » (ces Rendiconti, *tome IV, p. 89-105).*

Est-ce que cela vous intéresse de voir votre formule pour le nombre des constantes absorbées, par une singularité *donnée* d'une courbe plane, un peu plus développée ?

Si C est le nombre de ces conditions linéaires, I le nombre des intersections, auprès du point singulier, de deux courbes quelconques auxquelles sont imposées les mêmes conditions linéaires, E l'abaissement du genre produit par la singularité ainsi définie dans toute courbe algébrique, votre formule est (*):

$$C = I - E.$$

Elle se prête immédiatement à l'introduction des nombres caractéristiques de Smith et de Halphen. D'après le § V de ma Note « *Les combinaisons caractéristiques*, etc. » (ces *Rendiconti*, t. IV, p. 89), on a, pour une seule branche (cycle), avec les combinaisons caractéristiques

$$\Delta_0,\ \alpha_0;\qquad \Delta_1,\ \alpha_1;\quad \ldots\quad \Delta_b,\ \alpha_b\qquad (\Delta_{b+1} = 1),$$

c'est-à-dire pour la branche :

$$y_1 = x^{\frac{\alpha_0}{\Delta_0}}\left[x^{\frac{\Delta_1}{\Delta_0}}\right] + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\Delta_0}}\left[x^{\frac{\Delta_2}{\Delta_0}}\right] + \ldots + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{b-1}}{\Delta_0}}\left[x^{\frac{\Delta_b}{\Delta_0}}\right] + x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_b}{\Delta_0}}\left[x^{\frac{1}{\Delta_0}}\right],$$

dans votre formule :

$$I_1 = \alpha_0\Delta_0 + \alpha_1\Delta_1 + \ldots + \alpha_b\Delta_b + k_1,$$

$$E_1 = -\tfrac{1}{2}(\Delta_0 - 1) + \tfrac{1}{2}\alpha_0(\Delta_0 - 1) + \tfrac{1}{2}\alpha_1(\Delta_1 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha_b(\Delta_b - 1),$$

et par conséquent

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(\Delta_0 - 1) + \sum_{i=0}^{b} \tfrac{1}{2}\alpha_i(\Delta_i + 1) + k_1.$$

(*) *Comptes Rendus*, t. CIII, 4 octobre 1886.

Ici on suppose que les coefficients des termes qui définissent la singularité de la branche,

$$\text{de } x^{\frac{\alpha_0}{\Delta_0}} \quad \text{jusqu'à} \quad x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{h-1}+\alpha_h-1}{\Delta_0}},$$

soient *donnés*, et que les coefficients de k_1 termes, consécutifs à ce dernier, soient aussi *donnés* ($k_1 \geqq 0$). Ce dernier cas a lieu, si la singularité contient encore une autre branche y_2, dont la série commence par les *mêmes* termes que y_1, *inclusivement* les k_1 termes qui suivent la puissance

$$x^{\frac{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{h-1}+\alpha_h-1}{\Delta_0}};$$

car tous ces termes modifient le nombre des points d'intersection des deux branches.

Que l'on forme ces nombres I_j, E_j pour toutes les branches différentes de la singularité ($j = 1, 2, \ldots$), et soit S le nombre total des points d'intersection de ces branches différentes, prises deux-à-deux; l'on aura

$$I = \sum_j I_j + 2S,$$

$$E = \sum_j E_j + S;$$

par conséquent

$$C = \sum_j (I_j - E_j) + S.$$

Le calcul du nombre S se trouve chez Halphen, ou dans ma Note citée, § V.

Si les coefficients de quelques-uns des termes des séries, ici supposés donnés, sont laissés indéfinis—tout en laissant subsister les conditions d'égalité de termes de différentes branches qui définissent la singularité—il faut simplement soustraire de C le nombre de ces coefficients indéterminés.

Erlangen, 18 novembre 1890.

M. NOETHER.

NUOVI SOCI (1890).

[*Vedi* l'Elenco generale pp. XI-XXIV del presente volume].

RESIDENTI.

1890, 22 giugno. **Lanza** Giuseppe, conte di Mazzarino.—*Via Macqueda, palazzo Mazzarino.*

1890, 23 marzo. **Monroy** di Formosa Giovanni.—*Via alloro, palazzo Formosa.*

NON RESIDENTI.

1890, 23 marzo. **André** Désiré, già allievo della Scuola Normale superiore di Parigi, aggregato dell'Università, dottore in Scienze matematiche, membro onorario e già presidente della Società Filomatica di Parigi, membro e già presidente della Società Matematica di Francia; prof. di matematiche speciali nella scuola *Ste Barbe* e nel collegio *Stanislas.* — *17, rue Gay-Lussac — Paris.*

1890, 9 novembre. **Bettazzi** Rodolfo, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Galilei di Pisa. — *Pisa.*

1890, 8 giugno. **Delitala** Giuseppe, ingegnere, prof. di Geometria pratica nel R. Istituto Tecnico di Sassari. — *Sassari* (*Sardegna*).

1890, 23 marzo. **Macri** Vincenzo, ingegnere. — *Casteltermini* (*Sicilia*).

1890, 8 giugno. **Mukhopâdhyây** Asutosh, membro della Società Matematica di Francia, prof. di Matematica a Calcutta.—77, *Russa Road North, Bhowanipore — Calcutta.*

1890, 14 dicembre. **Pennacchietti** Giovanni, dottore in Matematica, prof. straord. di Meccanica razionale nella R. Università di Catania. — *Catania.*

1890, 13 aprile. **Picard** Émile, membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), membro e già presidente della Società Matematica di Francia, dottore in Scienze matematiche; professore alla Facoltà delle Scienze di Parigi.— *2, rue de la Sorbonne — Paris.*

1890, 23 marzo. **Poincaré** Henri, membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, sezione di Geometria), socio straniero della R. Accademia dei Lincei, membro e già presidente della Società Matematica di Francia, membro dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze, etc.; presidente della Commissione permanente internazionale pel Repertorio bibliografico delle Scienze matematiche; già allievo della Scuola Politecnica, dottore in Scienze matematiche; ingegnere delle Mine; professore di Fisica matematica alla Facoltà delle Scienze di Parigi, ripetitore alla Scuola Politecnica di Parigi.—*63, Rue Claude-Bernard — Paris.*

SOCI DEFUNTI.

Casorati Prof. Comm. Felice.
Conigliaro Salvatore.

SOCI DIMISSIONARI (a partire dal 1° genn. 1891).

Giardina Prof. Cav. Antonino.

RADIATI DALL'ELENCO DEI SOCI IN VIRTÙ DELL'ART. 10 DELLO STATUTO.

Gianforme Antonino.

SOCI PERPETUI.

Guccia, G.-B.—**Humbert**, G.—**Jordan**, C.

STATO DELLA SOCIETÀ AL 1° GENNAJO 1891.

Soci residenti	n°	51.
Soci non residenti dimoranti in Italia	n°	80.
Soci non residenti dimoranti all'Estero.	n°	18.
Totale	n°	149.

ERRATA-CORRIGE

relativa alla Memoria del prof. M. Gebbia « Su certe funzioni potenziali di masse, etc. », pp. 217-252.

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
220	10	$d\varsigma = \frac{dx_k\, dy_k}{\cos(R,\, z)}$	$d\varsigma = \frac{dx_k\, dy_k}{\gamma}$
227	10	$-\int_{R_0}^{R} dR \int_{\sigma} \rho\, d\sigma$	$-\int_{R_0}^{R} R\, dR \int_{\sigma} \rho\, d\sigma$
228	4	Q^0	Q_0
»	»	M M	$4\pi M$ $4\pi M$
229	8	dS'	ds'
230	13	$4\pi R \frac{\partial}{\partial a} \int_{K_e} \frac{\rho\, dK}{l}$	$4\pi R\, dR \frac{\partial}{\partial a} \int_{K_e} \frac{\rho\, dK}{l}$
»	20	$\int_{R_0}^{R_1} R\, dR \int_{e} \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} dK$	$4\pi \int_{R_0}^{R_1} R\, dR \int_{K_e} \rho \frac{\partial \frac{1}{l}}{\partial a} dK$
»	22	$= 2\pi \int_{K} R^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} dS$	$= 2\pi \int_{K} \rho R^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} dS$
234	15	$= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2} \frac{dS}{R} Q_{xx}$	$= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k^2} \frac{dS}{R} = Q_{xx}$
236	18	t	θ
240	19	$-2\pi \int_{K} \frac{\mu \alpha\, d\varsigma}{R}$	$-4\pi \int_{K} \frac{\mu \alpha\, d\varsigma}{R}$
243	2-3	centri	centro
244	9	Δ_2	Δ_1
245	7	(f)	(g)
»	14	R	R'
251	18	$(14)'$	$(13)'$

Michele Gebbia.

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI (*)

(*) Il segno * è apposto alle Comunicazioni inserite nei verbali delle Adunanze.

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo IV (1890).

Tip. Matematica di Michele Amenta, Palermo.

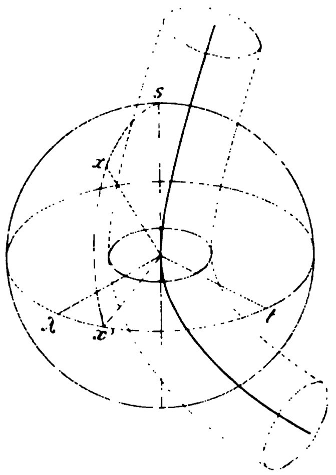

Fig.ª 1ª

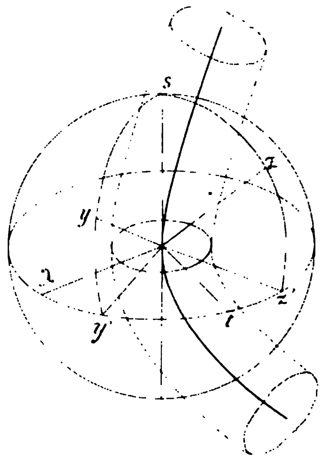

Fig.ª 2ª

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO.

Col titolo di « Biblioteca Matematica » il Circolo Matematico di Palermo pubblica un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

nella rubrica **pubblicazioni periodiche**, il sommario degli articoli di matematica contenuti negli atti di Accademie, riviste e giornali di scienza, coi quali il Circolo scambia i suoi *Rendiconti;*

nella rubrica **pubblicazioni non periodiche**, l'elenco delle opere, memorie, note, etc. di Matematica, che pervengono in dono alla biblioteca del Circolo.

Gli Autori, gli Editori e le Direzioni di Accademie, Società e Periodici scientifici, sono pregati di dirigere le pubblicazioni all'indirizzo:

Circolo Matematico — Via Ruggiero Settimo, 28 — Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO IV. — ANNO 1890.

PARTE SECONDA : BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

28, via Ruggiero Settimo, 28

1890

BIBLIOTECA MATEMATICA.

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

VII° ELENCO : luglio-dicembre 1889.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti : t. III, p. 34-41 e *retro*].

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. III, p. 34]. Lezioni sulle omografie binarie, dettate nel corso di Geometria Proiettiva. Napoli, 1889.

Beltrami, E. (Pavia). [*Vedi* t. III, p. 34]. Considerazioni idrodinamiche. *Rend. Ist. Lombardo*, $XXII_2$, 1889.

— Sul principio di H u y g e n s. *Rend. Ist. Lombardo*, $XXII_2$, 1889.

— Sull'estenzione del principio di D'A l e m b e r t all'elettrodinamica. *Rend. Acc. Lincei*, V, 1° sem., 16 giugno 1889.

— Sulla funzione potenziale della circonferenza. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Castelnuovo, G. (Torino). [*Vedi* t. III, p. 34]. Numero degli spazii che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni. *Rend. Acc. Lincei*, V, 2° sem., 4 agosto 1889.

— Su certi gruppi associati di punti. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

— Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. *Rend. Acc. Lincei*, V, 2° sem., 1 settembre 1889.

Clasen, B.-I. (Luxembourg). Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode an calcul des déterminants. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 12e année 1887-1888.

Del Pezzo, P. (Napoli). [*Vedi* t. III, p. 35]. Sui sistemi di curve e di superficie. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

Del Re, A. (Napoli). [*Vedi* t. III, p. 35]. Sulle reciprocità birazionali nulle del piano. *Rend. Acc. Napoli*, aprile, 1889.

— Connessi ed altre figure covarianti e contravarianti di un dato connesso di piani e di rette. Napoli, 1889.

— Il connesso lineo-lineare e le superficie polari congiunte rispetto ad esso e ad una superficie algebrica fondamentale. Napoli, 1889.

D'Ovidio, E. (Torino). [*Vedi* t. III, p. 35]. Uno sguardo alle origini ed allo sviluppo della Matematica pura. Discorso letto il 4 Novembre 1889, in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Torino. Torino, 1889.

Forsyth, A. R. (Cambridge). [*Vedi* t. III, p. 36]. Systems of ternariants that are algebraically complete. *American Journal of Mathematics*, XII, 1889.

— Systems of Quaternariants that are algebraically complete. *Cambridge Philosoph. Society's Transactions*, XIV, 1889.

Gerbaldi, F. (Palermo). [*Vedi* t. III, p. 36]. Sul sistema di due coniche. *Annali di Matem.*, $XVII_2$, 1889.

Guccia, G. B. (Palermo). [*Vedi* t. III, p. 36]. Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen. *Rend. Circ. Matem.*, III, 1889.

— Sulle singolarità composte delle curve algebriche piane. (Nota I^a). *Ibid.*, III, 1889.

— Sopra un recente lavoro concernente la riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane. *Ibid.*, III, 1889.

Hölder, O. (Göttingen). [*Vedi* t. III, p. 37]. Über den Söderberg'schen Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes. *Mathematische Annalen*, XXXIV, 1889.

Humbert, G. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 53]. Sur l'orientation des systèmes de droites. *American Journal of Mathematics*, X, 1888.

— Sur les courbes algébriques planes rectifiables. *Journ. de Jordan*, IV_4, 1888.

— Sur quelques propriétés des aires sphériques. *Ibid.*, IV_4, 1888.

— Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie. *Ibid.*, V_4, 1889.

— Sur l'aire de certaines zones ellipsoïdales. *Comptes Rendus*, CIX, 1889.

— Sur certaines aires ellipsoïdales. *Ibid.*, CIX, 1889.

— Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques. *Rend. Circ. Matem.* III, 1889.

— Sur une classe de surfaces algébriques. *Ibid.*, IV, 1890.

Lalbalettrier, G. (Paris). Trigonométrie rectiligne, suivie des principes de la nouvelle Géométrie du triangle. Croville-Morant, Paris, 1889.

Lebon, E. (Paris). [*Vedi* t. III, p. 37]. Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube. *Journal de Math. spéciales*, 1889.

— Sur les démonstrations de quelques propriétés métriques du triangle. *Mathesis*, IX, 1889.

— Traité de Géométrie descriptive. Delalain, Paris, 1889.

Lemoine, E. (Paris). [*Vedi* t. III, p. 37]. Note sur deux faisceaux de trois droites. *Journ. de Mathém. spéciales*, 1889.

— Sur la mesure de la simplicité dans les tracés géométriques. *Journ. de Mathem. élémentaires*, 1886.

— Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction. *Bulletin de la Société mathém. de France*, XVI, 1888.

Libri, G. (Doni del Generale Alfonso Scalia, in Palermo): Lettera autografa di Guglielmo Libri al cav. colonnello Alfonso Scalia, in data di Londra, 16 febbrajo 1863.

— Un nouvel épisode de l'affaire Libri, ou Lettre à M. le directeur du Journal l'*Athenaeum*; par Achille Jubinal, membre du comité de la Société des Gens de Lettres, ex-professeur à la Faculté des Lettres de Montpellier. — Paris, À la Librairie archéologique de Didron, rue Hautefeuille, 13 — 1851. — Imprimé par Hennuyer et Cie., rue Lemercier, 24, Batignolle. (8 pagine). [Due esemplari].

— Lettre de M. Libri à M. le Président de l'Institut de France. — Londres, Barthès et Lowell, Great Marlborough Street — 1850. — Imprimé par Schulze et Cie., 13, Poland Street, Londres. (72 pagine). [Due esemplari].

— Lettre de M. Libri à M. Barhélemy Saint-Hilaire, administrateur du Collège de France.—Londres, Barthès et Lowell, Great Marlborough Street— 1850. — Imprimé par Schulze et Cie., 13, Poland Street, Londres. (XVI-32 pagine).

— *Billet de faire part* (2ª édition, avec une note additionnelle). Londres, 14 et 20 avril 1851.—Imprimé par Schulze et Cie., 13, Poland Street, Londres. (4 pagine).

— Encore une Lettre inédite de Montaigne, accompagnée d'une Lettre à M. Jubinal, relative aux livres imprimés et manuscrits, aux autographes et aux divers fragmens précieux qui ont été soustraits à différentes époques de la Bibliothèque Nationale de Paris, et qui se trouvent en Angleterre; par Fr. Lepelle de Bois-Gallais, avec un fac-simile. — Londres, Barthès et Lowell, Great Marlborough Street — 1850. — Imprimé par Schulze et Cie., 13, Poland Street, Londres (VIII-32 pagine).

Longchamps, G. de (Paris). [*Vedi* t. III, p. 37]. Sur le cercle de Joachimsthal. *Mathesis*, IX, 1889.

— Cours de Mathématiques spéciales - Première Partie: Algèbre. Paris, Delagrave, 1889.

— Cours de Mathématiques spéciales — Supplément conforme au programme du 22 mai 1885. Paris, Delagrave, 1890.

Mayer, A. (Leipzig). [*Vedi* t. III, p. 38]. Ueber die Maxima und Minima impliciter Functionen und die Reciprocitätsgesetze in der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums. *Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, 1. Juli, 1889.

Mehmke, R. (Darmstadt). [*Vedi* t. III, p. 38]. Ein graphisches Interpolationsverfahren. *Zeitschr. des Vereines deutscher Ingenieure*, XXXIII, 1889.

Montesano, D. (Bologna). [*Vedi* t. III, p. 38]. Su le trasformazioni involutorie dello spazio, nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine n con una retta $(n-2)$-pla. *Rend. Acc. Lincei*, V, 2° sem., 1 settembre 1889.

Noether, M. (Erlangen). [*Vedi* t. II, p. 15]. Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen. *Math. Annalen*, XXXIV, 1889.

— Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung. *Abhandl. der K. Bayersch. Akad. der Wissensch.*, II. Cl., XVII Bd., I. Abth., 1889.

Ocagne, M. (d') et Neuberg. [*Vedi* t. III, p. 39]. Remarques sur une transformation biquadratique. *Mém. de la Société royale des sciences de Liège,* XVI$_2$, 1889.

Pascal, E. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 60]. Zur Theorie der ungeraden Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente. *Götting. Nachricht.* n. 15, 1889.

Peano, G. (Torino). [*Vedi* t. III, p. 39]. Sur les Wronskiens. Extrait d'une Lettre à M. P. Mansion. *Mathesis,* t. IX, 1889.

Pincherle, S. (Bologna). [*Vedi* t. III, p. 39]. Di una estensione dell'algoritmo delle frazioni continue. *Rend. Ist. Lombardo,* XXII$_2$, 1889.

— Su alcune forme approssimate per la rappresentazione di funzioni. *Mem. Acc. Bologna,* X$_4$, 1889.

Rizzuto, A. (Sciacca). La trisezione di un angolo qualunque. Sciacca, 1889.

Schlegel, V. (Hagen i./W.). Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. *Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.,* 1889.

— Sur le système de coordonnées réciproque à celui des coordonnées polaires. *Assoc. Française, Congrès de Grenoble,* 1885.

— Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungstheorie, 1871.

Schoute, P. H. (Groningen). [*Vedi* t. II, p. 17]. Over Viervlakken door Gelijkvormige driehoeken begrensd. *Koninklijke-Akad. van Wetensch.,* VI$_3$. Amsterdam, 1889.

— Sur un théorème relatif à l'Hessienne d'une forme binaire. Extrait d'une Lettre adressée à M. Guccia. *Rend. Circ. Matem.,* III, 1889.

Stieltjes, T.-J. (Toulouse). [*Vedi* t. III, p. 40]. Sur le développement de log Γ (*a*). *Journ. de Jordan,* V$_4$, 1889.

Teixeira, F. Gomes (Porto). [*Vedi* t. III, p. 41]. Curso de Analyse infinitesimal. Calculo integral (Primeira Parte). Porto, Typographia Occidental, 1889.

Tonelli, A. (Roma). [*Vedi* t. III, p. 41]. Sopra una classe di equazioni differenziali a derivate parziali di ordine *m*. *Rend. Acc. Lincei,* V, 1° sem., 3 febbraio 1889.

— Alcune formule relative a certe equazioni differenziali a derivate parziali di ordine *m*. *Ibid.,* V, 1° sem., 7 aprile 1889.

Vivanti, G. (Mantova). [*Vedi* t. III, p. 41]. Un problema d'algebra. *Giorn. Battaglini,* XXVII, 1889.

— Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen. *Schlömilch Zeitschr.,* XXXIV, 1889.

— Osservazioni sui punti singolari essenziali. *Rend. Circ. Matem.,* III, 1889.

Volterra, V. (Pisa). [*Vedi* t. III, p. 41]. Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate. *Rend. Circ. Matem..,* III, 1889.

Zeuthen, H.-G. (Kiöbenhavn). [*Vedi* t. III, p. 41]. Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. *Acta Mathematica,* XII, 1889.

— Extrait d'une Lettre adressée a M. Guccia. *Rend. Circ. Matem.,* III, 1889.

G. Lejeune Dirichlet's Werke,

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker — Berlin, Georg Reimer, 1889—*Erster Band*, mit G. Lejeune Dirichet's Bildniss (I. Abtheilung, enthaltend die von G. Lejeune Dirichlet selbst veröffentlichten Arbeiten):

I. Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré. — II. Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminée du cinquième degré. — III. De formis linearibus, in quibus continentur divisores primi quarumdam formularum graduum superiorum commentatio. — IV. Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. — V. Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs aux nombres. — VI. Question d'analyse indéterminée.—VII. Note sur les intégrales définies.—VIII. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. — IX. Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen. — X. Solution d'une question relative à la théorie mathématique de la chaleur. — XI. Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques. — XII. Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14èmes puissances. — XIII. Untersuchung über die Theorie der quadratischen Formen. — XIV. Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen. — XV. Ueber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen. — XVI. Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. — XVII. Sur les intégrales Euleriennes. — XVIII. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate.—XIX. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. — XX. Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression. — XXI. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz, ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. — XXII. Sur la manière de résoudre l'equation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires. — XXIII. Ueber die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie. — XXIV. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres. — XXV. Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples. — XXVI. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. — XXVII. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. — XXVIII. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. — XXIX. Ueber eine Eigenschaft der quadratischen Formen. — XXX. Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen. — XXXI. Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen. — XXXII. Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. — XXXIII. Sur la théorie des nombres. — XXXIV. Einige Resultate von Untersuchungen über eine Classe homogener Functionen des dritten und der höheren Grade. — XXXV. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen die Theorie der Zahlen. — XXXVI. Zur Theorie der complexen Einheiten.

Rend. Circ. Matem., t. IV, parte 2ª.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

COLLE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli.

[*Vedi* t. II, pag. 21].

SERIE II. — VOL. II (ANNO XXVII, 1888):

Battaglini: Rapporti intorno alle Note dei signori: Del Re (36), Pascal (66), Masoni (72), Marcolongo (110), Nannei (118), Montesano (181), Del Re (347), Marcolongo (362), Marcolongo (418), Del Re (423).

Capelli: Rapporto intorno alla Nota del signor Pascal (401).

— Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie (45-46).

— Una legge di reciprocità per le operazioni invariantive fra due serie di variabili n^{rie} (189-194).

Del Re: Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in se stessa (37-45).

— Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette e ad una superficie algebrica fondamentale (349-362).

— Sui sistemi polari reali bitangenti a sistemi polari reali dati (424-429).

Fergola: Rapporto dei lavori compiuti dall'Accademia nell'anno 1887 (5-13).

Marcolongo: Sulla rappresentazione conforme della Pseudosfera e sue applicazioni (111-117).

— Sull'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile (363-368).

— Sul teorema di Poisson (419-423).

— Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni alle derivate del primo ordine (500-508).

Masoni: Su di una nuova formola proposta pel calcolo della portata nelle bocche a stramazzo (73-79).

Montesano: Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1 (181-188).

Nannei: Le superficie ipercicliche (119-121).

Pascal: Sopra un'applicazione del metodo per esprimere una forma invariantiva di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo (67-72).

— Sopra alcune forme invariantive del sistema di due binarie biquadratiche (402-409).

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien.

(Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe)

[*Vedi* t. II, pag. 75].

XCVII. BAND — JAHRGANG 1888.

VI. und VII. HEFT (Juni und Juli):

Ameseder· Ueber die linearen Transformationen des tetraedralen Complexes in sich (627-635).

Krieg v. Hochfelden: Ueber projective Beziehungen, die durch vier Gerade im Raume gegeben sind (I. Mittheilung) (806-837).

Pick: Ueber die zu einer ebenen Curve dritter Ordnung gehörigen elliptischen Transcendenten (711-717).

VIII. HEFT (October):

Gegenbauer: Einige Sätze ueber bestimmte Integrale (1053-1062).

Sucharda: Ueber die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung (1083-1100).

Winckler: Ueber ein Kriterium des Grössten und Kleinsten in der Variationsrechnung (1065-1082).

IX. und. X. HEFT (November und December):

Escherich: Zur Theorie der zweiten Variation (1416-1441).

Jan de Vries: Ueber die einem Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration 18_3 (1307-1319).

Kohn: Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung (II. Mittheilung) (1381-1384).

Mertens: Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (1505-1522).

Pelz: Note zur Abhandlung: « Ueber die Focalcurven des Quetelet» (1411-1415).

Puchta: Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen (1269-1298).

Il Nuovo Cimento (Pisa),

Giornale fondato per la Fisica e la Chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la Fisica sperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici.

TERZA SERIE — TOMO XXV (1° Semestre 1889):

Beltrami: Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore (continuaz. e fine) (34-40).

— Sulle funzioni sferiche d'una variabile (152-161).

— Considerazioni idrodinamiche (212-222).

Betti: Sopra la entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Nota Iª (5-7) — Nota IIª (7-11).

TERZA SERIE — TOMO XXVI (2° Semestre 1889):

Beltrami: Sul principio di Huygens (233-243).

Donnini: Su l'energia cinetica dei sistemi che ammettono una funzione potenziale e si conservano in moto stabile (30-37).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de Mathématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté, sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique et de la Municipalité de Toulouse, avec le concours des Conseils Généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées.

TOME I (ANNÉE 1887):

Andoyer: Contribution à la théorie des orbites intermédiaires (*M*: 1-72).
Appell: Sur l'equilibre d'un fil flexible et inextensible (*B*: 1-5).
Brillouin: Questions d'Hydrodynamique (*Bibliographie*: 1-80).
Goursat: Sur un problème relatif aux courbes à double courbure (*C*: 1-26).
Kœnigs: Sur la forme des courbes à torsion constante (*E*: 1-8).
— Note sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire (*E*: 9-12).
— Sur l'emploi de certaines formes quadratiques en Géométrie (*E*: 13-43).
Picard. Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations (*A*: 1-15).

TOME II (ANNÉE 1888):

Baillaud: Recherches complémentaires sur le développement de la fonction perturbatrice (*E*: 1-21).
Bioche: Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches (*A*: 1-7).
Duhem: De l'aimantation par influence (*L*: 1-138).
— Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence (*Bibliographie*: 1-40).
Hermite: Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques (*C*: 1-12).
— Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce (*G*: 1-6).
Kœnigs: Contributions à la théorie du cercle dans l'espace (*F*: 1-19).
Painlevé: Sur les lignes singulières des fonctions analytiques (*B*: 1-130).
Stieltjes: Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (*K*: 1-26).
Tisserand: Sur une équation différentielle du second ordre qui joue un rôle important dans la Mécanique céleste (*D*: 1-25).

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

[*Vedi* t. II, pag. 21].

SERIE QUARTA — TOMO VIII (Sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche), 1888:

Beltrami: Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore (55-91).
Dainelli: Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forza diretta costantemente ad una retta fissa (23-33).

incherle: Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni (35-53).
azzaboni: Sul modo di dedurre le equazioni generali del moto dei fluidi e le particolari relative al moto lineare dei liquidi (3-10).
iccardi· Sopra un antico metodo per determinare il semidiametro della terra (17-22).
— Saggio di una Bibliografia Euclidea (135-257).
uffini: Di alcune proprietà della rappresentazione sferica del Gauss (281-300).
iporetti: Metodo analitico dello sviluppo di un arco circolare in funzione trigonometrica di un altro arco, cognito il quoto delle loro tangenti trigonometriche (11-15).
— Analisi nuova per dimostrare giusto l'usato metodo pratico degl'immaginari e teoria, più generale dell'usata, sulle relazioni fra i coefficienti delle funzioni algebrico-intere ad una variabile ed i fattori lineari, siano funzionali, siano propri delle equazioni (259-275),

SERIE QUARTA — TOMO IX (Sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche), 1889:

onati: Sul lavoro di deformazione dei sistemi elastici (75-97).
incherle: Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\Sigma h_\nu \varphi(x + a_\nu) = f(x)$ a coefficienti costanti (3-29).
— Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\Sigma h_\nu \varphi(x + a_\nu) = f(x)$ a coefficienti razionali (31-54).
irondini: Sugli inviluppi di piani e di sfere (193-235).
azzaboni (A): Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema coniugato (253-264).
etali: Ricerche sopra l'immaginario in geometria (55-73).
uffini: Di alcune proprietà delle coniche conjugate (155-192).
aporetti: Secondo metodo analitico della determinazione dell'equazione del tempo (237-241).

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma).

[*Vedi* t. III, pag. 58].

VOLUME V (1889) — SECONDO SEMESTRE:

attaglini: Rapporto sul concorso ai premi Ministeriali per le Scienze matematiche del 1887-88 (316-332).
eltrami: Rapporto sul concorso al premio Reale per la Matematica del 1887 (300-308).
ianchi: Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine (35-44).
ortolotti: Sopra un teorema della teoria della connessione (229-234).
rioschi: Relazione alle LL. MM. sui lavori dell'Accademia e sul risultato dei concorsi ai premi Reali e Ministeriali (273-283).
astelnuovo: Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni (71-78).
— Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere (130-133).
avalli: Intorno allo scambio di calore tra vapore e metallo nelle motrici monocilindriche (357-365).

Cerruti: Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti dei punti delle due superficie limiti (189-201).
Cesàro: Formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle curve (165-170).
— Sur le pouvoir rotatoir magnétique (202-208).
— Sulle variazioni di volume nei corpi elastici (259-264).
Marcolongo: Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni di limiti (349-357).
Montesano: Su le trasformazioni involutorie dello spazio nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine *n* con una retta (*n* — 2)-pla (123-130).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris

[*Vedi* t. III, p. 46].

TOME CIX (SECOND SEMESTRE 1889):

N° 2 (8 juillet):

Darboux et *Kœnigs*: Sur deux appareils nouveaux de Mécanique (49-51).
Léauté: Remarque sur les transmissions à grande vitesse (52-54).

N° 9 (26 août):

Kœnigs: Sur les surfaces à double génération circulaire et sur les surfaces doublement enveloppées par des quadriques (364-366):

N° 10 (2 septembre):

Gyldén: Sur la représentation analytique des perturbations des planètes (395-396).

N° 12 (16 septembre):

Callandreau: Sur les calculs de Maxwell, relatifs au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne (467-470).

N° 13 (23 septembre):

Picard: Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux derivées partielles par leurs valeurs sur un contour (499-501).

N° 14 (30 septembre):

Brioschi: Sur la dernière Communication d'Halphen à l'Académie (520-522).

N° 15 (7 octobre):

Liouville (*R*): Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications (560-563).
Kœnigs: Sur les surfaces dont le ds^2 peut être ramené de plusieurs manières au type de Liouville (565-568).

N° 16 (14 octobre):

Raffy: Sur les éléments linéaires doublement harmoniques (609-611).
Humbert: Sur l'aire de certaines zones ellipsoïdales (611-613).

N° 17 (21 octobre):

Mittag-Leffler: Sur les invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène (637-639).
Kœnigs: Sur les surfaces dont le ds^2 est réductible de plusieurs manières à la forme de Liouville (639-641).

N° 18 (28 octobre):

Raffy: Sur certains éléments linéaires harmoniques (661-663).

N° 20 (11 novembre):

Humbert: Sur certaines aires ellipsoïdales (734-737).
Bollée: Sur une nouvelle machine à calculer (737-739).

N° 22 (25 novembre):

Lelieuvre: Sur les lignes asymptotiques et les systèmes conjugués tracés sur une surface (792-794).
Quiquet: Généralisation de la loi de Makeham (794-797).

N° 23 (2 décembre):

Chaperon: Image mécanique des phénomènes thermodynamiques (852-855).

N° 25 (16 décembre):

Markoff: Sur les séries $\sum \frac{1}{k^2}$, $\sum \frac{1}{k^3}$ (934-935).

N° 26 (23 décembre):

d'Ocagne: Deux théorèmes généraux sur les trajectoires et les enveloppes de points et de droites mobiles dans un plan (959-960).
Peano: Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse (960-961).

N° 27 (30 décembre) — Séance publique annuelle:

Allocution du président M. Hermite (991-999).
Prix Francœur: M. Maximilien Marie (Rapporteur: M. *Bertrand*) (999).
Prix Poncelet: M. Edouard Goursat (Rapporteur: M. *Bertrand*) (1000).
Prix Petit d'Ormoy pour les sciences mathématiques: M. Paul Appell (Rapporteur: M. *Poincaré*) (1084).

PROGRAMME DES PRIX PROPOSÉS POUR LES ANNÉES 1890, 1891, 1892 ET 1893.

Journal für die reine und angewandte Mathematik.

[*Vedi* t. III, pag. 54].

BAND CV (1889):

Czuber: Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugel-Ausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen (180).

Frobenius: Ueber die Jacobischen Functionen dreier Variabeln (35-100).

Günther: Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten (1-34).

Hensel: Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen (329-344).

Königsberger: Ueber eine Determinantenbeziehung in der Theorie der Differentialgleichungen (170-179).

Kronecker: Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale (157-159).

— Summirung der Gauss schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$ (267-268).

— Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale (Fortsetzung des auf S. 157 bis 159 abgedruckten Aufsatzes) (345-354).

Lampe: Ueber eine Maximalaufgabe zur angeblichen Dreitheilung eines Winkels von *Averdieck* (355-356).

Lipschitz: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen (127-156).

Schlesinger: Zur Theorie der Fuchs schen Functionen (181-232).

Schottky: Ueber die Beziehungen zwischen den sechzehn Thetafunctionen von zwei Variabeln (233-249).

— Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten (269-297).

Staude: Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik (298-328).

Stern: Beweis eines Liouville schen Satzes (250-266).

Sturm (*R.*): Rein geometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen (101-126).

Tano: Sur quelques théorèmes de Dirichlet (160-169).

Journal de Mathématiques pures et appliquées (Paris).

[*Vedi* t. III, pag. 51].

TOME V. — ANNÉE 1889:

Appell: Sur les invariants de quelques équations différentielles (361-423).

Caspary: Extrait d'une Lettre à M. Hermite (73-79).

Duhem: Sur un théorème d'Electrodynamique. Note rectificative (53-54).

Halphen: Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$ (5-52).
Humbert: Sur le théorème d'A b e l et quelques-unes de ses applications à la Géométrie (81-134).
Jordan: G e o r g e s H a l p h e n (345-351).
Kœnigs: Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque (321-343).
Picard: Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (135-319).
Stieltjes: Sur le développement de l'exspression

$\{ R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y')] + r^2 \}^{-1}$ (55-65).

— Sur le développement de log $\Gamma(a)$ (425-444).
Teixeira: Sur le développement des fonctions implicites (67-71).
Liste des travaux mathématiques de G e o r g e s-H e n r i H a l p h e n (352-359).

Bulletin de la Société Philomatique de Paris.

[*Vedi* t. III, pag. 28].

Huitième Série. — Tome I (1888-1889) [Numéros 1, 2 et 3 (dernier)].

Compte-Rendu sommaire des séances de la Société Philomatique de Paris.

Numéros 1-13 (12 janvier-10 août 1889).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

[*Vedi* t. III, p. 31].

Tome VIII (1889):

A l g è b r e.

Biehler: Sur les équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs en Trigonométrie (552-563).
Comberousse: Sur les équations réciproques (27-33).
Fouret: Sur deux déterminants numériques (82-85).
Gutzmer: Note sur un point de la théorie des séries (22-27).
— Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe (101-111).
Guyou: Sur les approximations numériques (165-186).
Jamet: Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples (228-232).
Joffroy: Nouveau théorème sur les progressions arithmétiques (85-88).
Méray: Théorie élémentaire des fractions, dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. — Son application à la spécification mathématique de ces dernières (421-435).
Picard: Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées (5-13).

Géométrie pure.

Ancien élève de Mathématiques spéciales: Note sur un système de courbes planes (325-329).
— Construire les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués (329-330).
Aubert: Sur une généralisation du théorème de Pascal donnant neuf points en ligne droite (529-235).
Balitrand: Sur le déplacement d'une droite (526).
Bourlet: Sur les polyèdres (366-389).
Colette: Géométrie du compas (512-520).
Fouret: Sur quelques problèmes de Géométrie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré (34-48).
Lefèvre: Intersection d'une droite et de la surface réglée définie par trois directrices rectilignes (389-391).
Mannheim: Sur un déplacement particulier d'une figure de forme invariable (308-325).
Renon: Démonstration du théorème de Pascal (307).
Servais: Sur les cubiques nodales circulaires (197-203).

Géométrie analytique à deux dimensions.

Appell: Sur les points d'intersection d'une conique fixe avec une conique mobile passant par deux points (48-56).
Fabry: Étude géométrique d'une famille de coniques (56-76).
Faure: Sur le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle (98-100).
Ocagne (d'): Une application des coordonnées parallèles (568-573).
Pomey: Tangente en un point d'une courbe remarquable (527-529).

Géométrie analytique à trois dimensions.

Balitrand: Sur les cubiques gauches (520-525).
Biehler: Sur les plans diamétraux dans les surfaces du second ordre (247-275).
— Sur le plan asymptote et les cylindres asymptotes d'une surface (536-541).
— Sur les surfaces du deuxième degré (573-585).
Marchand: Étude du complexe proposé au Concours général de 1885 (122-137, 401-421).
Pomey: Longueur des axes d'une section plane d'une quadrique, en coordonnées obliques (88-98).

Calcul différentiel et intégral.

Amigues: Équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions (77-82).
Andrade: Sur l'invariant différentiel des figures congruentes (150-158).
Andradez: Sur deux théorèmes curieux signalés par M. Poincaré (435-440).
Cesàro: Sur la transformation orthotangentielle (116 119).
— Remarques sur les surfaces gauches (445-458).
Dolbnia: Sur l'addition des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce (204-213).

— Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques (459-471).

Lévy (Lucien): Note sur l'équation d'Euler et de Poisson (545-552).

Pomey: Calcul de la capacité électrostatique de deux fils télégraphiques parallèles (564-567).

Salvert (de): Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et les systèmes orthogonaux du second ordre (214-228).

Stieltjes: Sur un passage de la théorie analytique de la chaleur (472-478).

Teixeira: Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} \cot(x - a)\,dx$ (120-122).

Worontzoff: Sur le développement en série des fonctions implicites (140-143).

Mécanique.

Astor: Potentiel d'un ellipsoïde homogène ou composé de couches homogènes concentriques, dont la densité varie d'une couche à l'autre (232-243).

Fontaneau: Sur le problème de Clebsch (Théorie de l'élasticité des corps solides, § 39 à 42) (478-494).

Lévy (Lucien): Démonstration d'une formule relative à la capillarité (111-115).

Saint-Germain (de): Lieu des points d'un solide qui partagent avec le centre de gravité l'une de ses propriétés dynamiques (138-140).

Solutions de questions et sujets de composition donnés à divers concours.

Annali di Matematica pura ed applicata.

[*Vedi* t. III, p. 42].

Tomo XVII (1889-90):

Gerbaldi: Sul sistema di due coniche (161-196).

Klein (F): Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti (307-343).

Pascal: Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3 (81-111).

— Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti (197-224).

— Sulla teoria delle funzioni σ iperellittiche pari e dispari di genere 3 (257-305).

Pirondini: Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo dei suoi centri di curvatura (65-79).

— Sulle superficie di traslazione (225-255).

Predella: Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (113-159).

Somigliana: Sulle equazioni della elasticità (37-64).

Vivanti: Fondamenti della teoria dei tipi ordinati (1-35).

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzunsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

[*Vedi* t. III, p. 55].

JAHRGANG 1889:

Fuchs: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (489-502).
Helmholtz (von): Ueber atmosphaerische Bewegungen (Zweite Mittheilung) (503-522).
Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen (Fortsetzung) (19-29, 81-93, 133-154, 177-197, 211-219).
— Ueber symmetrische Systeme (221-234).
— Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten (289-315, 411-422).
— Ueber eine summatorische Function (581-595).
Reye: Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume (551-557).
Thiesen. Theorie der pendelartigen Schwingungen (199-210).

Bulletin de la Société Mathématique de France.

[*Vedi* t. III, p. 29].

TOME XVII (1889):

Antomari: Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône (118-124).
Berdellé: Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé par M. E. Catalan (102).
Bioche: Sur les courbes de M. Bertrand (109-112).
Catalan: Extrait d'une Lettre (205-206).
Chailan: Mouvement d'un point pesant sur une sphère. — Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère (112-118).
Frolov: Égalités à deux degrés (69-83).
Goursat: Sur une propriété des surfaces minima (102-104).
Issaly: Étude géométrique sur la courbure des pseudo surfaces (84-101).
Jeffery: Sur l'identité des nœuds d'une courbe du quatrième ordre et des nœuds de ses contravariants quartique et sextique (176-182).
Jonquière (A.): Note sur la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$ (142-152).
Kœnigs: Sur les lois de force centrale fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques (153-155).
Laisant: Sur un déterminant remarquable (104-107).
— Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points, dont trois sont fixes (169-171).
Laquière: Sur un problème de Géométrie cinématique (167-169).
Lucas (Félix): Statique des polynômes (17-69).
Ocagne (d'): Sur les nombres de Bernoulli (107-109).

— Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes (171-175).

Papelier: Applications du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre (182-204).

Pellet: Sur les fonctions réduites suivant un module premier (156-167).

Perrott: Sur une proposition empirique énoncée au *Bulletin* (155-156).

Picard: Sur certaines expressions quadruplement périodiques (131-142).

Teixeira: Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (125-131).

Zeitschrift für Mathematik und Physik.

[*Vedi* t. III, p. 32].

34. Jahrgang (1889):

Arithmetik und Analysis.

Dalwigk (von): Ueber einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (185-188).

Emmerich: Zur Neunerprobe (320).

Frischauf: Ueber Riemann's punktirt unstetige Function (193-198).

Hofmann: Ermittelung der Tragweite der Neunerprobe bei Kenntniss der subjectiven Genauigkeit des Rechnenden (116-119).

Koehler: Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung (36-54).

Láska: Ueber Reihentheoreme (316-319).

Lerch: Neuer Beweis einer Kirchhoff'schen Formel (63-64).

Mildner: Ueber die Bestimmung eines unendlichen Products (55-59).

Rieke: Ein Satz aus der Zahlenlehre (190-191).

— Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$ (238-248).

Saalschütz: Notiz zu dem Artikel « Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken » (192).

— Die elliptischen Integrale dritter Gattung, die sich auf solche erster Gattung zurückführen lassen (199-217).

Schendel: Bemerkung zu Dr. W. Braun's Mittheilung « Ueber die Kugelfunctionen einer Veränderlichen » (191-192).

Schirdewahn: Darstellung der hyperelliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung und erster Ordnung durch Integrale erster Gattung (355-364).

Schmidt: Ueber die Auflösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen (189-190).

Veltmann: Zur Invariantentheorie (321-330).

Vivanti: Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen (382-384).

Wangerin: Ueber das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ und einige andere mit demselben zusammenhängende Integrale (119-126).

Synthetische und analytische Geometrie.

Beyel: LVII Sätze ueber das orthogonale Viereck (218-237, 290-302).

— Bemerkungen ueber Pol und Polare eines Kegelschnittes (249-253).
— Eine Erweiterung des Doppelverhältnissbegriffes (375-382).
Binder: Ueber das System der Tangentialpunkte einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung (272-281).
Haas: Ueber die Indicatricen der Kegelschnitte (65-72).
Hauck: Ueber die parallelperspectivische Auffassung der Zeichnungsebene bei der Grund- und Aufrissprojection (254-256).
Küpper: Ueber die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere über deren Geraden (129-160).
Meister-Rasche: Ueber die Flächen zweiten Grades, welche ein gegebenes Tetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben (6-24, 73-91).
Richter: Ueber Kreisfusspunktcurven (338-354).
Schlömilch: Hyperarithmetische und hyperharmonische Mittel nebst geometrischen Anwendungen (59-63).
— Eine projectivische Eigenschaft des Pascal-Brianchon Sechsecks (188-189).
Schmidt: Ueber eine Anwendung der Symbolik bei einer Aufgabe aus der Theorie der Kegelschnitte (365-371).
Schotten: Der Simson'sche Satz vom Dreieck und dessen Erweiterung (311-313).
Schumacher: Geometrie der Kreise einer Kugel (257-271).
Weiler: Ueber die Osculationskreise bei Kegelschnitten (1-5, 177-184, 282-289).

Kinematik und Mechanik.

Grübler: Die Krummungsradien der Polbahnen (305-310).
Heffter: Zum Problem der Brachistochrone (313-316).
Jahnke: Bestimmung der Potentialfunction eines homogenen Ellipsoids (331-337).
Müller: Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve (303-305, 372-375).
Rachmaninow: Zurückführung der Gleichungen relativer Bewegung auf die canonische Form (25-35).

Mathematische Physik.

Cranz: Das Gesetz zwischen Ausdehnung und Stromstärke für einen von galvanischen Wechselströmen durchflossenen Leiter (92-110).
Gleichen: Ueber die Brechung des Lichtes durch Prismen (161-176).
Stankewitsch: Zur mechanischen Wärmetheorie (111-116).

HISTORISCH-LITERARISCHE ABTHEILUNG (besonders paginirt).

Christensen: Ueber Gleichungen vierten Grades im X. Buche von den Elementen des Euklid (201-217).
Gelcich: Die ersten Bestimmungen der Rotationsdauer der Sonne durch Beobachtung der Sonnenflecke (1-14, 41-53).
Nagl: Ueber eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christl. Abendlande (129-146, 161-170).
Staigmüller: Lucas Paciuolo (81-102, 121-128).

Proceedings of the London Mathematical Society.

[*Vedi* t. III, pag. 56].

VOL. XX. — TWENTY-FIFTH SESSION (1888-89):

Basset: On Crystalline Reflection and Refraction (351-372).
Betti: On the Motion of an Elastic Solid strained by Extraneous Forces (246-248).
Brill (J.): A Method of Transformation with the aid of Congruences of a Particular Type (102-109).
Brioschi: Sur la transformation des équations algébriques (127-131).
Burnside: On Deep-Water Waves resulting from a Limited Original Disturbance (22-38).
— On the Small Wave-Motions of a Heterogeneous Fluid under Gravity (392-397).
Cayley: On the Diophantine Relation $y^2 + y'^2 =$ Square (122-127).
Christie: A Theorem in Combinations (119-121).
Cockle: On the Confluences and Bifurcations of certain Theories (4-14).
Dickson: On Raabe's Bernoullians (14-21).
Elliott: On Projective Cyclic Concomitants, or Surface Differential Invariants (131-160).
Greenhill: Lamé's Differential Equation (213-224).
Griffiths: Note on the G-function in an Elliptic Transformation Annihilator (248-257).
Klein: Ueber die constanten Factoren der Thetareihen im allgemeinen Falle $p = 3$ (235-237).
Larmor: The Characteristics of an Asymmetric Optical Combination (181-194).
Leudesdorf: Some Results in the Elementary Theory of Numbers (199-212).
Love: On the Equilibrium of a Thin Elastic Spherical Bowl (89-102).
MacMahon: On Play « à outrance » (195-198).
Mannheim: Construction du centre de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surface que l'on projette orthogonalement sur un plan (241-244).
Mathews: On the Reduction of a Complex Quadratic Surd to a Periodic Continued Fraction (237-241).
Pearson: On a certain Atomic Hypothesis (38-63).
— On the Generalised Equations of Elasticity, and their application to the Theory of Light (297-350).
Rayleigh: On the Free Vibrations of an Infinite Plate of Homogeneous Isotropic Elastic Matter (225-234).
— On the Uniform Deformation in Two Dimensions of a Cylindrical Shell of Finite Thickness, with application to the General Theory of Deformation of Thin Shells (372-381).
Rogers: On Secondary Invariants (161-179).
Tanner: On Cyclotomic Functions (63-87, 258-296).
Taylor (H. M.): A Geometrical Note (422-424).
Taylor (W. W.): On some Rings of Circles connected with a Triangle and the Circles (Schoute's system) that cut them at Equal Angles (397-416).
Walker: Results of Ternary Quadric Operators on Products of Forms of any Orders (110-119).

— On the Figures of a certain Class of Cubic Curves and their Concomitant (382-392).

Wolstenholme: Certain Algebraical Results deduced from the Geometry of the Quadrangle and Tetrahedron (419-421).

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

[*Vedi* t. III, pag. 49].

Vol. XXII (1889):

Ascoli: Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita (317-335, 438-448, 686-726, 804-816).

Aschieri: Delle omografie sopra una conica e dei loro sistemi lineari (414-428, 484-496, 558-565, 624-646).

Bardelli: Baricentri e momenti di inerzia di superficie e di solidi di rotazione (497-509).

Beltrami: Considerazioni idrodinamiche (121-130).

— Sul principio di Huygens (428-438).

Bertini: Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie (771-778).

Brioschi: Sopra un simbolo di operazione nella teorica delle forme (117-121).

Casorati: Nuova misura della curvatura delle superficie (335-346, 842).

Ferrini: Rendiconto dei lavori della classe di scienze matematiche e naturali (15-23).

— Appunti sul calcolo della spirale compensatrice per una dinamo a potenziale costante (565-575).

Jorini: Travi reticolate rettilinee di uniforme resistenza (255-269).

Maggi: Sui principî della teoria della funzione potenziale (647-657).

— Sulla teoria dei doppi strati agenti (785-796).

Morera: Intorno all'integrale di Cauchy (191-200).

Pincherle: Di un'estensione dell'algoritmo delle frazioni continue (555-558).

Somigliana: Intorno ai parametri differenziali (275-288).

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario.

[*Vedi* t. III, pag. 56].

Anno IV (1889):

Benucci: Sul triangolo che ha per lati le mediane di un triangolo dato (52-54).

Bernardi: Sopra due esercizî proposti nella Trigonometria del Serret (54-57).

Besso: Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo (14-17).

— Sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli (144-145).

Biffignandi: Rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali (67-73, 107-114).

Gatti: Sul numero delle divisioni nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri (100-104).

Gianni: Sopra i sistemi di circoli aventi lo stesso asse radicale (8-13, 45-48).
Giuliani: Sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri (65-66).
Gremigni: Le proprietà dei prodotti e dei quozienti estese ai monomi algebrici (171-177).
Millosevich: Il Sistema metrico (1-7, 33-45).
Murer: Dei poligoni che corrispondono ai triangoli rettangoli ed agli acutangoli ed alcune questioni relative di probabilità (161-171).
Panizza: Esempî geometrici di limiti (139-144).
Riboni: Alcune formole sulle somme delle potenze simili dei numeri naturali (49-51).
Rindi: Alcune proprietà projettive del triangolo (97-100).
Sauve: Sopra una proprietà dei fuochi delle coniche (129-133).
Sbrana: Il teorema di Pitagora ed il postulato delle parallele (104-107).
Suini: Sulla teoria delle parallele (134-139).

Memorie della sezione matematica della Società dei Naturalisti della Nuova Russia (*). Odessa.

[*Vedi* t. II, pag. 44].

Tomo VIII (1888):

Stankievitsch: Studio sulla teoria cinetica della struttura dei corpi.
Slechinsky: Sulla convergenza delle frazioni continue.
— Su certi limiti.
Ermakoff: Problemi diversi.

Tomo IX (1889):

Zantchevsky: Teoria delle viti.
Roussiane: Su una questione di probabilità.

Tomo X (1889):

Zimmerman: Sullo sviluppo in frazione continua di una funzione che è determinata dall'equazione differenziale

$$M\frac{dy}{dx} + Ny + Py^2 + Q = 0,$$

dove M, N, P, Q sono dei polinomi interi.
Starkoff: Sulla teoria delle equazioni.
Slechinsky: Sulla convergenza delle frazioni continue.

Raccolta matematica della Società Matematica di Mosca.

Tomo XII — Fasc. I (1885):

Bougaieff: Alcune applicazioni sulla teoria delle funzioni ellittiche e delle funzioni discontinue.

(*) La versione dal russo dei sommari di questa e della seguente raccolta scientifica è dovuta alla cortesia della signora E. de Kerbedz, di Pietroburgo.

Miassoiedoff: Sul modo di determinare il più basso limite delle radici positive e delle radici negative di un'equazione algebrica.

Anissimoff: Alcuni teoremi sulle curve gobbe.

Nekrassoff: Sulla serie di Lagrange.

— Sul metodo dei minimi quadrati.

Tomo XII — Fasc. II (1885):

Letnikoff: Sulle funzioni ipersferiche.

Bougaieff: Una legge generale nella teoria dei numeri.

Nekrassoff: Sulla serie di Lagrange.

— Sulle equazioni cicliche.

Delaunay: Sull'urto dei corpi solidi.

Tomo XIII — Fasc. III (1885):

Miassoiedoff: Sulla teoria della divisione delle radici.

— Sulle funzioni simili alle funzioni di Sturm.

Nekrassoff: Sulla serie di Lagrange.

Bougaieff: Fondamenti del calcolo di $E\varphi(x)$ con una sola variabile indipendente.

Tomo XIII — Fasc. II (1887):

Bougaieff: Fondamenti del calcolo di $E\varphi(x)$ con una sola variabile indipendente.

Michelson: La più semplice deduzione della legge termodinamica dai principi della meccanica analitica.

Pokrovsky: Sulla teoria delle funzioni ultraellittiche di 1ª classe.

Mlodziejevsky: Sulla deviazione della trajettoria nell'attrazione Newtoniana.

Joukovsky: Osservazioni sull'articolo precedente

Tomo XIII Fasc. III (1887):

Pokrovsky: Sulla teoria delle funzioni ultraellitiche di 1ª classe.

Possé: Sopra le differenziazioni.

Korkin: Sulla curvatura delle superficie.

Delaunay: Sull'urto dei corpi solidi.

Serdobinsky: Sugl'integrali delle equazioni alle derivate parziali di second'ordine.

Minin: Sul modo di ottenere delle serie.

Tomo XIII — Fasc. IV (1888):

Sludkovsky: Teoria generale della figura della terra.

Preobrajensky: Sul numero dei numeri semplici e composti compresi fra limiti dati.

Nekrassoff: Rappresentazione delle radici di certe equazioni per mezzo degl'integrali determinati.

Ermakoff: Sulla trasformazione uniforme di alcune figure geometriche.

Bougaieff: Sulla funzione logaritmica.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

[*Vedi* t. IV, pag. 12].

TOME III (Année 1889):

Andoyer: Sur un problème de Géométrie (D: 1-6).

Appell: Sur les équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants (K: 1-12).

Biocbe: Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée (N: 1-41).

Carvallo: Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes (O: 1-40).

Cosserat: Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace (E: 1-81).

— Sur les formes bilinéaires (M: 1-12).

Kænigs: La Géométrie réglée et ses applications (1-24).

Legoux: Attraction d'un ellipsoide homogène ou composé de couches homogènes sur un point extérieur (A: 5-12).

— Sur l'intégration de l'équation $ds^2 = E du^2 + F du dv + G dv^2$ (F: 1-2).

Lerch: Sur certains développements en séries trigonométriques.—Extrait d'une Lettre adressée à M. Appell (C. 1-11).

Rouquet: Étude d'un complexe du sixième ordre (F: 1-20).

Stieltjes: Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable (H: 1-17).

Stouff: Sur certains groupes fuchsiens et sur une extension de la théorie des formes quadratiques (B: 1-28).

American Journal of Mathematics.

[*Vedi* t. III, pag. 42].

VOLUME XI. — (1889):

Bosset: On the Steady Motion of an Annular Mass of Rotating Liquid (172-181).

Bolza: On the Construction of Intransitive Groups (195-214).

Cayley: On the Surfaces with Plane or Spherical Curves of Curvature (71-98, 293-306).

— On the Theory of Groups (139-157).

D'Ocagne: Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales (55-70).

Fields: The Expression of any Differential Coefficient of a Function of a Function of any number of Variables by aid of the corresponding Differential Coefficients of any n Powers of the Function, where n is the Order of the Differential Coefficient (388-396).

Fine: On the Functions Defined by Differential Equations, with an Extension of the Puiseux Polygon Construction to these Equations (317-328).

Franklin: Note on the Double Periodicity of the Elliptic Functions (283-292).

Goursat: Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées (329-372).

Heun: Die Herstellung einer linearen Differentialgleichung aus einem gegebenen Element der Integralfunction (215-220).
Johnson: On the Integrals in Series of Binomial Differential Equations (37-54).
Königsberger: Ueber die Reduction von Integralen transcendenter Functionen (221-282).
Lie (S.): Die Begriffe Gruppe und Invariante (182-186).
Love: Vortex Motion in certain Triangles (158-171).
MacMahon: Memoir on a New Theory of Simmetric Functions (1-36).
Morley: On the Geometry of a Nodal Circular Cubic (307-316).
Perott: Remarque au sujet du théorème d'E u c l i d e sur l'infinité du nombre des nombres premiers (99-138).
Picard: Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées et les fonctions fuchsiennes (187-194).
Rowland: Electromagnetic Waves and Oscillations at the Surface of Conductors (373-387).

VOLUME XII. — (1890).

Appell: De l'homographie en mécanique (103-114).
Cole: On Rotations in Space of Four Dimensions (191-210).
Fine: Singular Solutions of Ordinary Differential Equations (295-322).
Forsyth: Systems of Ternariants that are Algebraically Complete (1-60, 115-160).
Franklin: On Some Applications of Circular Coordinates (161-190).
— On Confocal Bicircular Quartics (323-336).
MacMahon: Second Memoir an a New Theory of Symmetric Functions (61-102).
Poincaré: Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (211-294).
Taber: On the Theory of Matrices (337-396).

Bibliotheca Mathematica.

[*Vedi* t. III, pag. 44].

1889:

Bobynin: Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science (104-108).
Christensen und *Heiberg*: Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark (75-83).
Curtze: Ueber den «*liber de similibus arcubus*» des A h m e d b e n I u s u f (15-16).
Dickstein: Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne (43-51).
Eneström: Bibliographique suédoise de l'histoire des mathématiques 1667-1888 (1-14).
— Sur le premier emploi du symbole π pour 3, 14159 (28).
Favaro: Il Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. B o n c o m p a g n i 1868-1887 (109-112).

— Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia (113-115).

Holst: Bibliographische Notir über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen (97-103).

Loria: Addizioni alle notizie storiche sulla Geometria numerativa (23-27).

— Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet (67-74).

Riccardi: Di alcune opere di Prospettiva di autori Italiani omesse nella « Histoire de la Perspective » di M. Poudra (39-42).

Steinschneider: Miscellen zur Geschichte der Mathematik (35-38).

Suter: Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512-1526 (17-22).

Wolf: Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts (33-34).

Bulletin des Sciences Mathématiques.

[*Vedi* t. III, pag. 30-31].

IIe Série.—Tome XIII (1889):

Comptes rendus et analyses.

Ahrendt. — Untersuchungen über die Parallelflächen der Flächen zweiten Grades (*J. T.*) (86-87).

Allman. — Greek Geometry from Thales to Euclid (*Paul Tannery*). (272-278).

Bertrand. — Calcul des probabilités (*J. T.*). (25-48).

Catalan. — Mélanges mathématiques (38).

Darboux. — Leçons sur la théorie générale des surfaces, et les applications géométriques du Calcul infinitésimal (*G. K.*). (241-252).

Duhem. — Théorie nouvelle de l'aimentation par influence fondée sur la Thermodynamique (*J. T.*) (252-255).

Goedseels. — Théorie des surfaces réglées, précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniment petits (155-156).

Graindorge. — Intégration des équations de la Mécanique (*J. T.*). (278).

Gross. — Ueber die Combinanten binärer Formensysteme welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind (*J. T.*). (85-86).

Gruey. — Exercices astronomiques à l'usage des élèves des Facultés et des Observatoires (*G. F.*). (284-288).

Heinrichs. — Ueber den Bündel der jenigen kubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben (*J. T.*). (82-83).

Juel. — Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginäre Plans Geometrie (*H. Z.*) (282-284).

Lie (S). — Theorie der Transformationsgruppen (*E. Vessiot*, *W. de Tannenberg*). (113-148).

Loria. — Die Hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie (*J. T.*) (201-202).

Mélanges

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[*Vedi* t. III, p. 42].

VOLUME VI. — 1889.

Bigiavi: Sopra una classe di equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici (161-252).
Ciani: Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria (1-160).

Berichte ueber die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

(Mathematisch-Physische Classe).

[*Vedi* t. III, p. 43-44].

EINUNDVIERZIGSTER BAND. — 1889:

Engel: Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffaschen Gleichungen (157-176).
Krause: Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der doppelt periodischen Functionen dritter Art (110-116).
— Zur Theorie der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art. (347-364).
Lie (*S.*): Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik (145-156).
— Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre canonische Form (277-289).
— Ueber irreducibile Berührungstransformationsgruppen (320-327).
Mayer (*A.*): Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums (122-144).
— Ueber die Maxima und Minima impliciter Functionen und die Reciprocitätsgesetze in der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums (308-319).
Mittheilung über das Möbius-Archiv (14-21).
Neumann (*C.*): Ueber das Malfatti'sche Problem (22-30).
Scheffers: Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (290-307).
— Ueber die Berechnung von Zahlensystemen (400-457).
Scheibner: Zur Reduction elliptischer, hyperelliptischer und Abel'scher Integrale. Das Abel'sche Theorem für einfache und Doppelintegrale (31-56).
— Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen (86-109, 245-276).
— Ueber die Differentialgleichungen der elliptischen Modulfunctionen und Invarianten (331-342).
Schur: Ueber die canonische Form der Parametergruppe (229-231).
Study: Complexe Zahlen und Transformationsgruppen (177-228).
Thomae: Ueber Curven, deren Punkten mehrere Parameterwerthe entsprechen (365-377).

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences Lettres et Beaux-Arts de Belgique.

[*Vedi* t. III, p. 44].

LIXe ANNÉE. — IIIe SÉRIE.

TOME XVII (janvier-juin 1889):

Catalan: Nouvelles notes d'Algèbre et d'Analyse (129-130).

Deruyts (*S.*): Sur la représentation de l'homographie de seconde espèce sur la cubique gauche (312-329).

— Sur une propriété commune aux courbes normales des espaces linéaires (545-554).

Servais: Sur les ombilics dans les surfaces du second degré (366-384).

TOME XVIII (juillet-décembre 1889):

Catalan: Remarques sur un Mémoire de M. G. de Longchamps (41-48).

— Sur une formule de M. Baschwitz (666-669).

— Sur une nouvelle formule de M. Baschwitz (770).

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.

ERSTER TEIL — Geschichte der Gesellschaft von 1690 bis 1890.

ZWEITER TEIL — Wissenschaftliche Abhandlungen:

Ahlborn: Zum Pentagramma mirificum (69-74).

Bock: Kombinatorische Ableitung einiger Eigenschaften der Θ-Funktionen (74-80).

Bruns: Note zur Störungstheorie (3-8).

Busche: Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den vierten Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen (80-92).

Cantor (*M.*): Ueber einige Konstructionen von Lionardo da Vinci (8-15).

Eichler: Die Darstellung der cyklischen Kurven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie (92-105).

Günther: Die Knotenlinien der Atmo-und Hydrosphäre (15-25).

Hoppe: Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisierung eines Magnetstabes (105-110).

Hurwitz: Ueber die Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen (25-31).

Järisch: Zur Theorie der linearen partiellen Differential-Gleichungen (110-119).

Keferstein: Ueber den Begriff der Zahl (119-125).

Kiessling: Zur Erklärung des Sehens mit bewaffnetem Auge (125-128).

Köpcke: Analytische Darstellung einer differentiierbaren Funktion mit Oscillationen in jedem Intervalle (128-153).

Kronecker: Ueber die Dirichlet'sche Methode der Wertbestimmung der Gauss'schen Reihen (32-36).

Krüss: Spektralapparat mit automatischer Einstellung der Prismen (153-158).

Lazarus: Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik (158-162).

Netto: Ueber den grössten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Funktionen (36-43).
Reye: Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt (43-60).
Schröder: Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ-und $\mathfrak{z}$-Funktionen (162-172).
Schubert: Kegelschnitt-Anzahlen als Funktionen der Raum-Dimension n (172-184).
Sturm (*R.*): Ueber die sogenannten Strahlenkongruenzen ohne Brennfläche (61-68).

Comptes Rendus de l'Association Française pour l'avancement des Sciences.
[*Vedi* t. III, p. 49].

XVIII^{me} SESSION (Paris, 1889) — 2^{e} Partie (Notes et Mémoires):

Berdellé: Théorie des logarithmes fondée sur la multiplication des séries (38-42).
Bierens de Haan: Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des œuvres de Christian Huygens (233-237),
Cailler: Note sur l'expression $1 + \cfrac{1}{3 + \cdots + \cfrac{1}{2n-1}}$ (158-161).
Collignon: Observations au sujet de la rencontre de deux points mobiles dans un plan (1-7).
— Note sur les courbes circulaires synchrones (7-23).
Commines de Marsilly: Études sur le « postulatum d'Euclide » et sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire (88-100).
Delannoy: Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité (43-52).
Genty: Note de géométrie vectorielle sur les surfaces isothermiques (53-60).
Joukovsky: Un appareil nouveau pour la détermination des moments d'inertie des corps (23-24).
Laisant: Intégration directe de l'expression $\cos^p x \sin^q x\, dx$ (225-227).
Lemoine: Contributions à la géométrie du triangle (197-222).
Neuberg et *Gob*: Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiépert (166-179).
— — Sur les foyers de Steiner d'un triangle (179-196).
Ocagne (*d'*): Sur les trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée (228-233).
Oltramare: Application du calcul de généralisation à la détermination des intégrales des équations linéaires aux différentielles partielles avec coefficients variables (145-158).
Pellet: Sur les cercles ou sphères se coupant sous des angles donnés (161-163).
— Sur la résolution trigonométrique de certaines équations (164-165).
Perrin: Sur les caractères de divisibilité (24-38).
Schoute: Sur des quadruples équianharmoniques ou harmoniques (100-117).
Tarry: Géométrie générale (60-87).

Vigarié: Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle (117-141).
— Calendrier lunaire perpétuel (141-144).

ANNUNZIO. — *Per mancanza di spazio rimandiamo al prossimo volume l'Elenco delle* **Pubblicazioni non periodiche,** *pervenute in dono alla Biblioteca del Circolo da gennajo a dicembre 1890, ed i sommari matematici delle seguenti* **Pubblicazioni periodiche:**

Acta Mathematica.
[*Vedi* t. III, p. 60].

Acta Societatis Scientiarum Fennicae.

Annales de l'École Normale supérieure de Paris.

Annals of Mathematics.
[*Vedi* t. III, pag. 43].

Annual Report of the Smithsonian Institution.
[*Vedi* t. III, p. 60].

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.
[*Vedi* t. III, p. 59].

Atti del Collegio degl'Ingegneri ed Architetti di Palermo.
[*Vedi* t. III, p. 43].

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
[*Vedi* t. III, p. 43].

Berichte des Naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.
[*Vedi* t. III, p. 58].

Bulletin Scientifique.
[*Vedi* t. III, p. 45].

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo.
[*Vedi* t. III, p. 64].

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.
[*Vedi* t. III, p. 45].

Comunicazioni e protocolli delle sedute della Società Matematica di Karkoff.
[*Vedi* t. III, p. 64].

Crónica Científica.
[*Vedi* t. III, p. 60].

Educational Times.
[*Vedi* t. III, p. 50].

Giornale di Matematiche.
[*Vedi* t. III, p. 9].

Giornale di Scienze Naturali ed Economiche.
[*Vedi* t. III, p. 50].

Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik.
[*Vedi* t. III, p. 50].

Jahresbericht der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.
[*Vedi* t. III, p. 61].

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas.
[*Vedi* t. III, p. 51].

Journal de Mathématiques élémentaires.
[*Vedi* t. III, p. 51].

Journal de Mathématiques spéciales.
[*Vedi* t. III, p. 53].

Mathesis.
[*Vedi* t. III, p. 55].

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.
[*Vedi* t. III, p. 64].

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.
[*Vedi* t. III, p. 55].

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.
[*Vedi* t. III, p. 55].

Memoirs of the National Academy of Sciences of Washington.
[*Vedi* t. III, p. 56].

Memorias de la Sociedad Científica «Antonio Alzate».

Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).
[*Vedi* t. III, p. 64].

Monatshefte für Mathematik und Physik.

Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen.
[*Vedi* t. III, p. 61].

Nieuw Archief voor Wiskunde.
[*Vedi* t. III, p. 64].

Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A).
[*Vedi* t. III, p. 61].

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
[*Vedi* t. III, p. 9].

Proceedings of the Canadian Institute.
[*Vedi* t. III, p. 60].

Proceedings of the Royal Society of London.
[*Vedi* t. III, p. 57].

Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo.
[*Vedi* t. III, p. 64].

Revue générale des Sciences pures et appliquées.

Revue Scientifique (revue rose).
[*Vedi* t III, p. 49].

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München.
[*Vedi* t. III, p. 63].

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.
[*Vedi* t. III, p. 62].

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen.

Tidsskrift for Mathematik.
[*Vedi* t. III, p. 26].

Transactions of the Cambridge Philosophical Society.
[*Vedi* t. III, p. 28].

Wiskundige Opgaven.
[*Vedi* t. III, p. 64].

G. B. G.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

CON LE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti*.

Fine della Parte 2ª del Tomo IV (1890).

Tip. Matematica di Michele Amenta, Palermo.

Tipografia Matematica di Palermo, 7, via Villareale. (482.1500.1/2)